2023届·普通高中名校联考信息卷(模拟三)·数学

参考答案

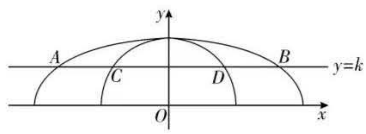
1. B 【解析】由题意可得 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x|x<1\}$，则 $A\cup B=\{x|x\leqslant 4\}$.

2. C 【解析】因为复数 z_1，z_2 是方程 $x^2+x+1=0$ 的两个根，所以 $z_1+z_2=-1$，$z_1z_2=1$，所以 $\frac{z_2}{z_1+1}+\frac{z_1}{z_2+1}=\frac{z_2(z_2+1)+z_1(z_1+1)}{(z_1+1)(z_2+1)}=\frac{(z_2^2+z_2)+(z_1^2+z_1)}{z_1z_2+(z_1+z_1)+1}=\frac{-1-1}{1-1+1}=-2$.

3. A 【解析】设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$，则由 $2S_3=3a_2+8a_1$ 得 $2a_1+2a_2+2a_3=3a_2+8a_1$，即 $6a_1+a_2-2a_3=0$，即 $a_1(6+q-2q^2)=0$，即 $6+q-2q^2=0$，解得 $q=2$($q=-\frac{3}{2}$舍去). 由 $S_8=2S_7+2$ 得 $a_8=S_7+2$，即 $a_1q^7=\frac{a_1(1-q^7)}{1-q}+2$，将 $q=2$ 代入得 $2^7a_1=\frac{a_1(1-2^7)}{1-2}+2$，解得 $a_1=2$，则 $a_2=a_1q=4$.

4. D 【解析】由题意得 $\overrightarrow{BE}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{BO}$，显然 $BE=DG$，$BO=OD=\frac{1}{2}BD$，所以 $\overrightarrow{BG}=(2-\frac{\sqrt{5}-1}{2})\overrightarrow{BO}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{BO}$，故 $\overrightarrow{BO}=\frac{2}{5-\sqrt{5}}\overrightarrow{BG}=\frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}\overrightarrow{BG}$，因为 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BA}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BA}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}(\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BA})=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{BO}$，所以 $\overrightarrow{BF}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{\sqrt{5}}{5}\overrightarrow{BG}$.

5. B 【解析】如下图所示：

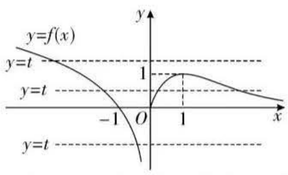


直线 $y=h$ 交半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(y\geqslant 0)$ 于 A，B 两点，交半圆 $x^2+y^2=b^2(y\geqslant 0)$ 于 C，D 两点，由题意可得 $\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{2\sqrt{a^2(1-\frac{h^2}{b^2})}}{2\sqrt{b^2-h^2}}=\frac{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2}}{\sqrt{b^2-h^2}}=\frac{a}{b}$，将半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(y\geqslant 0)$ 和半圆 $x^2+y^2=b^2(y\geqslant 0)$ 绕着 x 轴旋转一圈后，利用垂直于 y 轴的平面去截椭球体与球体，设截面面积分别为 S，S'，由题意可知 $\frac{S}{S'}=\frac{\frac{1}{4}\pi\cdot|AB|\cdot|CD|}{\frac{1}{4}\pi\cdot|CD|^2}=\frac{a}{b}$，设半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(y\geqslant 0)$ 绕 x 轴旋转一圈所得的几何体体积为 V，半圆绕 x 轴旋转一圈所得的几何体体积为 V'，则 $\frac{V}{V'}=\frac{a}{b}$，所以，$V=\frac{a}{b}V'=\frac{a}{b}\cdot\frac{4\pi b^3}{3}=\frac{4\pi ab^2}{3}$.

6. C 【解析】若甲、乙 2 个家庭的 5 张票连号，则有 $A_2^1 \cdot A_4^4=48$ 种不同的分配方法，若甲、乙 2 个家庭的 5 张票不连号，则有 $A_3^3 \cdot A_4^2=72$ 种不同的分配方法，综上，这 8 张门票共有 $48+72=120$ 种不同的分配方法.

7. B 【解析】由于 $a=\ln 1.01=\ln(1+0.01)$，$c=\sqrt{1.02}-1=\sqrt{1+0.01\times 2}-1$，故设函数 $f(x)=\ln(1+x)-\sqrt{1+2x}+1(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+2x}}=\frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{(1+x)\sqrt{1+2x}}$，$x>0$，由于 $(\sqrt{1+2x})^2-(1+x)^2=-x^2<0$，所以 $(\sqrt{1-2x})^2<(1+x)^2$，即 $\sqrt{1+2x}-(1+x)<0$，即 $f'(x)<0$，故 $f(x)=\ln(1+x)-\sqrt{1+2x}+1(x>0)$ 为单调递减函数，故 $f(x)<f(0)=0$，即 $\ln(1+x)<\sqrt{1+2x}-1(x>0)$，令 $x=0.01$，则 $\ln(1+0.01)<\sqrt{1+2\times 0.01}-1$，即 $a<c$；又 $a=\ln 1.01=\ln(1+0.01)$，$b=\frac{2}{201}=\frac{2\times 0.01}{2+0.01}$，令 $g(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{2+x}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}>0(x>0)$，即 $g(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{2+x}(x>0)$ 为单调递增函数，故 $g(x)>g(0)=0$，即 $\ln(x+1)>\frac{2x}{2+x}(x>0)$，令 $x=0.01$，则 $\ln 1.01>\frac{2\times 0.01}{2+0.01}=\frac{2}{201}$，即 $a>b$，故 $b<a<c$.

8. C 【解析】当 $x\geqslant 0$，$f(x)=xe^{1-x}$，$f'(x)=(1-x)e^{1-x}$，令 $f'(x)=(1-x)e^{1-x}>0$ 解得 $0\leqslant x<1$，令 $f'(x)=(1-x)e^{1-x}<0$ 解得 $x>1$，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$f(x)_{\max}=f(1)=1$. 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)>0$，作出函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(-x), x<0,\\ xe^{1-x}, x\geqslant 0\end{cases}$ 的图象如下：



关于 x 的方程 $f^2(x)-af(x)+a^2-a=0$ 有四个不等实根，令 $t=f(x)$，$g(t)=t^2-at+a^2-a$，则 $g(t)=0$ 有两个不相等的实数根，(ⅰ) $t_1=0$，$t_2=1$，此时 $f(x)=0$，$f(x)=1$ 各有 2 个根，满足题意，所以 $\begin{cases}g(0)=a^2-a=0,\\ g(1)=1-a+a^2-a=0,\end{cases}$ 解得 $a=1$. (ⅱ) $t_1\in(0,1)$，$t_2\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$，由 $g(1)=(a-1)^2>0$，则函数 $g(t)=0$ 的一个根在 $(0,1)$，另一个根在 $(-\infty,0)$，所以 $g(0)=a^2-a<0$ 解得 $0<a<1$，综上，$a\in(0,1]$.

9. ACD 【解析】因为 $a>0$，$b>0$，且 $a+2b=1$，所以 $2\sqrt{2ab}\leqslant 1$，即 $ab\leqslant\frac{1}{8}$，A 正确；当 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$ 时，$2a+b=\frac{5}{4}>\frac{1}{2}$，B 错误；$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=(a+2b)(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})=\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}+5\geqslant 9$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{3}$ 时，等号成立，C 正确；因为 $a>0$，$b>0$，且 $a+2b=1$，所以 $0<a<1$，$0<b<1$，所以 $\log_a b>0$，则 D 正确.

10. AB 【解析】对于 A，由题意可知 A_1，A_2，A_3 不可能同时发生，所以 A_1，A_2，A_3 两两互斥，所以 A 正确；对于 B，由题意可得 $P(A_2)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，$P(A_2B)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{9}=\frac{1}{12}$，所以 $P(B|A_2)$

$=\frac{P(A_2B)}{P(A_2)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$,所以 B 正确;对于 C,因为 $P(A_3)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$,$P(A_3B)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{9}=\frac{1}{12}$,$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)=\frac{4}{8}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{9}=\frac{7}{18}$,所以 $P(A_3B)\neq P(A_3)P(B)$,所以 A_3 与 B 不是相互独立事件,所以 C 错误;对于 D,由 C 选项可知 D 是错误的.

11. BC 【解析】由题意得 $f'(x)=A\omega\cos(\omega x+\varphi)$,则 $f(2\pi)=f'(2\pi)$,即 $A\sin\varphi=A\omega\cos\varphi$,故 $\tan\varphi=\omega$,因为 $\omega\in\mathbf{N}^*$,$|\varphi|<\frac{\pi}{3}$,所以 $\tan\varphi=\omega<\sqrt{3}$,所以 $\omega=1$,$\varphi=\frac{\pi}{4}$,A 错误;因为破碎的涌潮的波谷为 -4,所以 $f'(x)$ 的最小值为 -4,即 $-A\omega=-4$,所以 $A=4$,所以 $f(x)=4\sin(x+\frac{\pi}{4})$,则 $f(\frac{\pi}{3})=4\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=4(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,B 正确;因为 $f(x)=4\sin(x+\frac{\pi}{4})$,所以 $f'(x)=4\cos(x+\frac{\pi}{4})$,所以 $f'(x-\frac{\pi}{4})=4\cos x$,则 C 正确;由 $-\frac{\pi}{3}<x<0$,得 $-\frac{\pi}{12}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$,因为 $y=4\cos x$ 在 $(-\frac{\pi}{12},0)$ 上单调递增,在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上单调递减,所以 $f'(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{3},0)$ 上不单调,D 错误.

12. AC 【解析】设直线 $l:x=my+t$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}x=my+t,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 整理得 $y^2-4my-4t=0$,则 $y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4t$. 因为直线 OA,OB 的斜率之积为 -2,所以 $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-2$. 因为 $y_1^2=4x_1$,$y_2^2=4x_2$,所以 $x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{16}$,所以 $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{16}{y_1y_2}=\frac{16}{-4t}=-2$,解得 $t=2$,即直线 l 过定点 $(2,0)$,A 正确;由 A 选项可知 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times2|y_1-y_2|=\sqrt{16m^2+32}=4\sqrt{m^2+2}\geqslant4\sqrt{2}$,当且仅当 $m=0$ 时,等号成立,则 $\triangle OAB$ 面积的最小值是 $4\sqrt{2}$,B 错误;在 $\triangle ABF$ 中,由余弦定理可得 $|AB|^2=|AF|^2+|BF|^2-2|AF|\cdot|BF|\cos\angle AFB$. 因为 $\angle AFB=120°$,所以 $|AB|=\sqrt{|AF|^2+|BF|^2+|AF|\cdot|BF|}$,则 $\frac{|AF|+|BF|}{|AB|}=\sqrt{\frac{|AF|^2+|BF|^2+2|AF|\cdot|BF|}{|AF|^2+|BF|^2+|AF|\cdot|BF|}}=\sqrt{1+\frac{1}{\frac{|AF|}{|BF|}+\frac{|BF|}{|AF|}+1}}$. 因为 $\frac{|AF|}{|BF|}+\frac{|BF|}{|AF|}\geqslant2$,所以 $\frac{|AF|+|BF|}{|AB|}\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$,当且仅当 $|AF|=|BF|$ 时,等号成立,C 正确;由 C 选项可知直线 l 的斜率不存在,设直线 $l:x=m$,则直线 l 与 x 轴的交点为 $M(m,0)$,从而 $|MF|=|m-1|$,$|AM|=2\sqrt{m}$. 因为 $\angle AFB=120°$,所以 $\angle AFM=60°$,所以 $\tan\angle AFM=\frac{|AM|}{|MF|}=\sqrt{3}$,即 $\frac{2\sqrt{m}}{|m-1|}=\sqrt{3}$,整理得 $3m^2-10m+3=0$,解得 $m=3$ 或 $m=\frac{1}{3}$. 当 $m=3$ 时,$|AF|=4$;当 $m=\frac{1}{3}$ 时,$|AF|=\frac{4}{3}$. 综上,$|AF|=4$ 或 $|AF|=\frac{4}{3}$,D 错误.

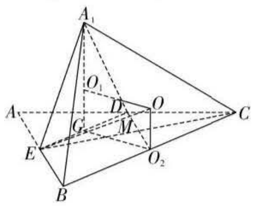
13. 60 【解析】由 $(x^2-\frac{2}{x})^n$ 的展开式的二项式系数之和为 64,可得 $2^n=64$,解得 $n=6$,即 $(x^2-\frac{2}{x})^6$,则展开式第三项为 $C_6^2(x^2)^4(-\frac{2}{x})^2=(-2)^2C_6^2x^6=60x^6$,所以展开式第三项的系

数是 60.

14. $-\frac{7}{9}$ 【解析】因为 $2\alpha+\frac{2\pi}{3}=2(\alpha+\frac{\pi}{12})+\frac{\pi}{2}$，则 $\sin(2\alpha+\frac{2\pi}{3})=\cos 2(\alpha+\frac{\pi}{12})=2\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{12})-1=-\frac{7}{9}$.

15. e 【解析】$(\frac{x_2}{x_1})^{x_1x_2}-\frac{e^{ex_2}}{e^{ex_1}}<0$ 等价于 $(\frac{x_2}{x_1})^{x_1x_2}<\frac{e^{ex_2}}{e^{ex_1}}$，即 $x_1x_2(\ln x_2-\ln x_1)<ex_2-ex_1$，即 $\ln x_2+\frac{e}{x_2}<\ln x_1+\frac{e}{x_1}$. 设 $f(x)=\ln x+\frac{e}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{e}{x^2}=\frac{x-e}{x^2}$. 由题意可知 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 上单调递减，则 $f'(x)=\frac{x-e}{x^2}\leqslant 0$ 在 $(0,a]$ 上恒成立，则 $(0,a]\subseteq(0,e]$，故 a 的最大值为 e.

16. 39π　$\frac{27\pi}{4}$ 【解析】由题可知，当平面 $A_1DE\perp$ 平面 $BCDE$ 时，三棱锥 A_1-CED 的体积最大，取 DE 的中点 G，连接 A_1G，易知 $\triangle A_1DE$ 的外接圆圆心 O_1 位于 A_1G 且靠近点 G 的三等分点处，设 BC 的中点为 O_2，连接 O_2E，O_2D，则 $O_2B=O_2C=O_2D=O_2E=3$，可知 O_2 为四边形 $BCDE$ 的外接圆圆心，过 O_1 作平面 A_1DE 的垂线，过 O_2 作平面 $BCDE$ 的垂线，两垂线的交点即四棱锥 A_1-$BCDE$ 的外接球球心 O. 连接 O_2G，易得四边形 OO_1GO_2 为矩形，$OO_2=O_1G=\frac{\sqrt{3}}{2}$，连接 OE，在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_2E$ 中，$OE^2=OO_2^2+O_2E^2=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+3^2=\frac{39}{4}$，所以四棱锥 A_1-$BCDE$ 外接球 O 的表面积为 $4\pi R^2=39\pi$. 由题可得，以 EC 为直径的球 O 的截面圆的面积最小，最小值为 $(\frac{EC}{2})^2\pi=\frac{EC^2}{4}\pi=\frac{BC^2-BE^2}{4}\pi=\frac{6^2-3^2}{4}\pi=\frac{27\pi}{4}$.



17. 解：(1)因为 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD\cdot\sin\angle DAC$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BE$，

$S_{\triangle ACD}=2S_{\triangle ABC}$，所以 $\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD\cdot\sin\angle DAC=AC\cdot BE$. ………………………… 3 分

所以 $AD\cdot\sin\angle DAC=2\cdot BE=2\sqrt{2}$. ………………………………………………… 5 分

(2)由题 $CE=1$，在 $\triangle ACD$ 中，$\frac{CD}{\sin\angle DAC}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$，

所以 $AD\cdot\sin\angle DAC=CD\cdot\sin\angle ACD=2\sqrt{2}$. ……………………………………… 6 分

又 $CD=3$，所以 $\sin\angle ACD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\cos\angle ACD=\pm\sqrt{1-\frac{8}{9}}=\pm\frac{1}{3}$. …………… 7 分

在 $\triangle CDE$ 中，由余弦定理，得 $DE^2=CE^2+CD^2-2\cdot CE\cdot CD\cdot\cos\angle ACD$.

当 $\cos\angle ACD=\frac{1}{3}$ 时，$DE^2=1^2+3^2-2\times1\times3\times\frac{1}{3}=8$，所以 $DE=2\sqrt{2}$.

当 $\cos\angle ACD=-\frac{1}{3}$ 时，$DE^2=1^2+3^2-2\times1\times3\times(-\frac{1}{3})=12$，所以 $DE=2\sqrt{3}$.

综上：$DE=2\sqrt{2}$ 或 $DE=2\sqrt{3}$. ……………………………………………………………… 10 分

18. 解：(1)设公差为 d，公比为 q，

则由题可得数列 $\{a_n\}$ 的前 8 项和 $8a_1+\frac{8\times7}{2}d=8a_1+28d=64$，

因为 $d=2$，所以 $a_1=1$，所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$，…………………… 1 分

又因为 $b_1=3$，$b_3-b_2=b_1q^2-b_1q=18$，

所以 $q^2-q-6=0$ 解得 $q=3$ 或 $q=-2$(舍去)，…………………… 2 分

所以 $b_n=3\times3^{n-1}=3^n$. …………………… 3 分

(2)由(1)得 $c_n=\frac{2n-1}{3^n}$，所以 $S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$，

即 $S_n=\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\cdots+\frac{2n-1}{3^n}$，$\frac{1}{3}S_n=\frac{1}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^{n+1}}$， …………………… 5 分

两式相减得 $\frac{2}{3}S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{2}{3^n}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}+2[\frac{\frac{1}{9}-\frac{1}{9}(\frac{1}{3})^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}]-\frac{2n-1}{3^{n+1}}$

$=\frac{2}{3}-\frac{2n+2}{3^{n+1}}$，

所以 $S_n=1-\frac{n+1}{3^n}$. …………………… 6 分

(3)由(1)得 $d_n=\frac{a_{n+2}-1}{a_na_{n+1}b_n}=\frac{2(n+2)-2}{(2n-1)(2n+1)\cdot3^n}=\frac{2n+2}{(2n-1)(2n+1)\cdot3^n}$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{(2n-1)\cdot3^{n-1}}-\frac{1}{(2n+1)\cdot3^n}]$. …………………… 8 分

则 $T_n=d_1+d_2+d_3+\cdots+d_n=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1\times3^0}-\frac{1}{3\times3^1})+(\frac{1}{3\times3^1}-\frac{1}{5\times3^2})+(\frac{1}{5\times3^2}-\frac{1}{7\times3^3})$

$+\cdots+(\frac{1}{(2n-1)\cdot3^{n-1}}-\frac{1}{(2n+1)\cdot3^n})]=\frac{1}{2}(\frac{1}{1\times3^0}-\frac{1}{(2n+1)\cdot3^n})=\frac{1}{2}-$

$\frac{1}{2(2n+1)\cdot3^n}$. …………………… 11 分

因为 $\frac{1}{2(2n+1)\cdot3^n}>0$，所以 $T_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)\cdot3^n}<\frac{1}{2}$. …………………… 12 分

19. 解：(1)由题意知甲得 0 分的概率为 $1-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$， …………………… 2 分

乙得 0 分的概率为 $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$， …………………… 4 分

所以甲、乙两人所得分数相同的概率为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{15}\times\frac{1}{12}=\frac{29}{90}$. …… 5 分

(2)X 可能的取值为 0，1，2，3，4，5，6， …………………… 6 分

则 $P(X=0)=\frac{1}{15}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{180}$，

$P(X=1)=\frac{1}{15}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{36}$，

$P(X=2)=\frac{1}{15}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{10}$，

$P(X=3)=\frac{1}{15}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{12}=\frac{19}{90}$，

$P(X=4)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{11}{36}$，

$P(X=5)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{15}$,

$P(X=6)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$, ………………………………………………………………………… 9 分

所以,随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{180}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{19}{90}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{12}$

……… 11 分

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{180}+1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{19}{90}+4\times\frac{11}{36}+5\times\frac{4}{15}+6\times\frac{1}{12}=\frac{47}{12}$. …… 12 分

20. 解:(1)因为 $AB/\!/CD$, $CD=2AB$, P 为 CD 的中点,

所以 $AB/\!/PC$,且 $AB=PC$, $ABCP$ 为平行四边形,所以 $AP/\!/BC$ 且 $AP=BC=2$,

因为 $\angle ABC=90°$,所以 $AB\perp BC$,则 $AP\perp AB$.

又因为 $\angle BAF=90°$,所以 $AB\perp AF$,所以 $\angle FAP$ 为二面角 F-AB-D 的平面角,

所以 $\angle FAP=60°$. ………………………………………………………………………………… 3 分

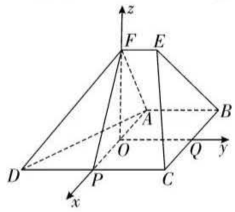
又因为 $AF=AP=2$,所以 $\triangle FAP$ 为等边三角形.

因为 O 为 AP 的中点,则 $AP\perp FO$,

又因为 $AB\perp AF$, $AP\perp AB$, $FA\cap AP=A$,所以 $AB\perp$ 平面 FAP. 因为 $FO\subset$ 平面 FAP,

所以 $FO\perp AB$, $AB\cap AP=A$,所以 $FO\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………………… 6 分

(2)设 BC 的中点为 Q,以 OP, OQ, OF 所在的直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,则 $F(0,0,\sqrt{3})$, $A(-1,0,0)$, $D(1,-2,0)$, $E(0,1,\sqrt{3})$, $B(-1,2,0)$, $C(1,2,0)$, $\overrightarrow{AF}=(1,0,\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AD}=(2,-2,0)$, $\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{EC}=(1,1,-\sqrt{3})$. …………… 8 分



设平面 ADF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ 2x_1-2y_1=0,\end{cases}$

取 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$. ………………………………………………………………… 9 分

设平面 BCE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_1=0,\\ x_2+y_2-\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$

取 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},1)$. ……………………………………………………………………… 10 分

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}|=\frac{\sqrt{7}}{7}$. ……………………………………………………… 11 分

所以所求二面角的正弦值为 $\sqrt{1-(\frac{\sqrt{7}}{7})^2}=\frac{\sqrt{42}}{7}$. ……………………………………… 12 分

21. 解:(1)证明:由等轴双曲线知离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$, $|AF_1|-|AF_2|=4\sqrt{2}=2a$,及 $c^2=a^2+b^2$,

可得 $a^2=8$, $b^2=8$, $c^2=16$,所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$, $F_2(4,0)$. ………………… 2 分

当直线 AB 的斜率不存在时, $x_1=x_2=4$, $x_1y_2-x_2y_1=4y_2-4y_1=4(y_2-y_1)$;

当直线 AB 的斜率存在时, $k_{AF_2}=k_{BF_2}$, $\frac{y_1}{x_1-4}=\frac{y_2}{x_2-4}$,整理得 $x_1y_2-x_2y_1=4(y_2-y_1)$,

综上所述, $x_1y_2-x_2y_1=4(y_2-y_1)$ 成立. ……………………………………………………… 5 分

(2)依题意可知直线 AD 的斜率存在且不为 0，设直线 AD 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，

代入双曲线 $x^2-y^2=8$ 并化简得：$(x_1+2)^2x^2-y_1^2(x+2)^2-8(x_1+2)^2=0$，①

由于 $x_1^2-y_1^2=8$，则 $y_1^2=x_1^2-8$，代入①并化简得：

$(4x_1+12)x^2-4(x_1^2-8)x-12x_1^2-32x_1=0$，…………………………………………… 7 分

设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_1x_0=\frac{-3x_1^2-8x_1}{x_1+3}$，$x_1+x_0=\frac{x_1^2-8}{x_1+3}$，解得 $x_0=\frac{-3x_1-8}{x_1+3}$，

代入 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，得 $y_0=\frac{-y_1}{x_1+3}$，即 $P(\frac{-3x_1-8}{x_1+3},\frac{-y_1}{x_1+3})$，

同理可得 $Q(\frac{-3x_2-8}{x_2+3},\frac{-y_2}{x_2+3})$，…………………………………………… 9 分

所以 $k_2=\dfrac{\frac{-y_2}{x_2+3}-\frac{-y_1}{x_1+3}}{\frac{-3x_2-8}{x_2+3}-\frac{-3x_1-8}{x_1+3}}=\frac{-(x_1y_2-x_2y_1)-3(y_2-y_1)}{x_1-x_2}$

$=\frac{-4(y_2-y_1)-3(y_2-y_1)}{x_1-x_2}=(-7)\cdot\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}=7k_1$，

所以$\frac{k_2}{k_1}=7$ 是定值. …………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{e^x}{x}+\ln x-x$，

所以 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+\frac{1}{x}-1=(x-1)(\frac{e^x-x}{x^2})$，…………………………………… 1 分

设 $S(x)=e^x-x$，$x>0$，则 $S'(x)=e^x-1>0$，故 $S(x)$为$(0,+\infty)$上的增函数，

故 $S(x)>S(0)=1>0$，

当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$在$(0,1)$上为单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增. …………………… 3 分

(2)由已知，$f'(x)=\frac{(ae^x-x)(x-1)}{x^2}=\frac{e^x(a-\frac{x}{e^x})(x-1)}{x^2}(x>0)$，

函数 $u(x)=\frac{x}{e^x}$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，所以 $u(x)\leqslant u(1)=\frac{1}{e}$，

又当 $x>0$ 时，$e^x>1$，$0<u(x)\leqslant\frac{1}{e}$，…………………………………………………… 4 分

①当 $a\geqslant\frac{1}{e}$时，$a-\frac{x}{e^x}\geqslant0$，此时当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,1)$上单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增；

所以 $f(x)_{极小值}=f(1)=ae-1$，无极大值；

②当 $0<a<\frac{1}{e}$时，$u(a)=\frac{a}{e^a}<\frac{a}{e^0}=a$，$u(1)=\frac{1}{e}>a$，又 $u(x)$在$(a,1)$上单调递增，

所以 $f'(x)$在$(a,1)$上有唯一零点 x_1，且$\frac{x_1}{e^{x_1}}=a$，…………………………………… 5 分

设 $U(x)=2\ln x-x$，$x>e$，则 $U'(x)=\frac{2-x}{x}<0$，故 $U(x)$在$(e,+\infty)$上为减函数.

所以 $U(x)<U(e)=2-e<0$，所以 $2\ln\frac{1}{a}<\frac{1}{a}$，

所以 $u(\ln\frac{1}{a^2})=\frac{\ln\frac{1}{a^2}}{e^{\ln\frac{1}{a^2}}}=a\cdot\frac{2\ln\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}}<a,u(1)=\frac{1}{e}>a$, ………………………………… 6 分

又 $u(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $f'(x)$ 在 $(1,\ln\frac{1}{a^2})$ 上有唯一零点 x_2,且 $\frac{x_2}{e^{x_2}}=a$,

故当 $x\in(0,x_1)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减;

当 $x\in(x_1,1)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(x_1,1)$ 上单调递增;

当 $x\in(1,x_2)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在 $(1,x_2)$ 上单调递减;

当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增;

所以函数 $f(x)$ 有两个极小值点.

故实数 a 的取值范围为 $(0,\frac{1}{e})$. ……………………………………………………… 7 分

(3)由已知 $F(x)=f(x)-(2\ln x-x+\frac{1}{x})$,

即 $F(x)=\frac{ae^x}{x}-\ln x-\frac{1}{x}$,其定义域为 $(0,+\infty)$,所以 $F'(x)=\frac{(x-1)(ae^x-1)}{x^2}$,

当 $F'(x)=0$ 时,$x=1$ 或 $x=-\ln a$,

因为 $a\in(1,+\infty)$,所以 $-\ln a<0$,

当 $x\in(0,1)$ 时,$F'(x)<0$;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$F'(x)>0$,

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $F(x)\geqslant F(1)=ae-1$. ……………………………………………………………… 9 分

所以要证 $F(x)\geqslant\frac{\ln(ax)}{x}-\ln x+e-1$,只需证 $\frac{\ln(ax)}{x}-\ln x+e-1\leqslant ae-1$,

即证 $\frac{\ln(ax)}{x}-\ln x\leqslant(a-1)e$,

令 $G(x)=\frac{\ln(ax)}{x}-\ln x$,

则 $G'(x)=\frac{1}{x^2}[1-x-\ln(ax)]$, ……………………………………………………… 10 分

记 $h(x)=1-x-\ln(ax)$,则 $h'(x)=-1-\frac{1}{x}<0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,又 $h(\frac{1}{a})=1-\frac{1}{a}>0$,$h(1)=-\ln a<0$,

故存在 $x_0\in(\frac{1}{a},1)$,使得 $h(x_0)=1-\ln(ax_0)-x_0=0$,即 $\ln(ax_0)=1-x_0$,

所以 $G(x)\leqslant G(x_0)=\frac{\ln(ax_0)}{x_0}-\ln x_0=\frac{1}{x_0}-\ln x_0-1$, ………………………… 11 分

记 $\varphi(x)=\frac{1}{x}-\ln x-1$,在 $(\frac{1}{a},1)$ 上单调递减,$\varphi(x_0)<\varphi(\frac{1}{a})=a+\ln a-1$,

故只需证 $a+\ln a-1<(a-1)e$,即 $m(a)=(e-1)(a-1)-\ln a>0$,

因为 $m'(a)=e-1-\frac{1}{a}>0$,所以 $m(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,$m(a)>m(1)=0$ 成立,

故原不等式成立. ……………………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。