2023届高三年级5月适应性考试

数学试题参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	C	A	C	B	C	D	AD	BCD	ABD	ABD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，满分20分.

13. $\sqrt{2}$　　14. (1, 4, 2) 或 (4, 1, 2)（写一个即可）　　15. $\left[\dfrac{\ln 2+1}{4},1\right)$　　16. $\sqrt{6}-\sqrt{3}$

选择题与填空题详解：

1. 【答案】D

【解析】$z=\dfrac{2}{1+i}=1-i$，$\therefore |\bar{z}+i|=|1+2i|=\sqrt{5}$，故正确答案为D

2. 【答案】B

【解析】$A=\{x|\log_2 x<1\}=\{x|0<x<2\}$，$C_R B=\{x|-1<x<1\}$，$\therefore A\cup C_R B=\{x|-1<x<2\}$，故正确答案为B

3. 【答案】C

【解析】由残差图可知，残差的方差不是一个常数，随解释变量x的变大而变大，所以模型误差不满足一元线性回归模型的$D(e)=\sigma^2$的假设，故正确答案为C

4. 【答案】A

【解析】设数列$\{a_n\}$的公比为q，则$a_m a_n=(a_1\cdot q^{m-1})\cdot(a_1\cdot q^{n-1})=a_1^2\cdot q^{m+n-2}$，$a_r a_s=(a_1\cdot q^{r-1})\cdot(a_1\cdot q^{s-1})=a_1^2\cdot q^{r+s-2}$

若$m+n=r+s$，则$a_m a_n=a_r a_s$，$\therefore$“$m+n=r+s$”是“$a_m a_n=a_r a_s$”的充分条件；

若$a_m a_n=a_r a_s$，则$a_1^2\cdot q^{m+n-2}=a_1^2\cdot q^{r+s-2}$，若$q=1$，则$m,n,r,s$可以取任意正整数，若$q\neq 1$，则$m+n=r+s$，

$\therefore$“$m+n=r+s$”不是“$a_m a_n=a_r a_s$”的必要条件，故正确答案为A

5. 【答案】C

【解析】$\because (\dfrac{\sin\theta}{x}-x+1)^6$的展开式中$x^4$的系数为$C_6^4-C_6^5\cdot\sin\theta=12$，$\therefore \sin\theta=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$，故正确答案为C

6. 【答案】B

【解析】设$f(x)=\sin x-x(0<x<1)$，则$f'(x)=\cos x-1<0$，$\therefore f(x)$在区间$(0,1)$上单调递减，

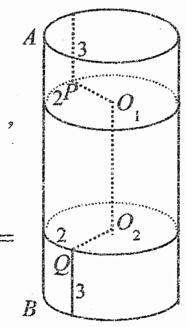
$\therefore f(x)<f(0)=0$，即$\sin x<x$，又$\because 0<x<1$，$\therefore 0<\dfrac{\sin x}{x}<1$，$\therefore (\dfrac{\sin x}{x})^2<\dfrac{\sin x}{x}$；

设$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}(0<x<1)$，则$g'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，令$r(x)=x\cos x-\sin x$则$r'(x)=-x\sin x<0$，

$\therefore r(x)$在区间$(0,1)$上单调递减，$\therefore r(x)<r(0)=0$，$\therefore g'(x)<0$，$\therefore g(x)$在区间$(0,1)$上单调递减，

$\because 0<x^2<x<1$，$\therefore g(x^2)>g(x)$，即$\dfrac{\sin x^2}{x^2}>\dfrac{\sin x}{x}$.综上，$(\dfrac{\sin x}{x})^2<\dfrac{\sin x}{x}<\dfrac{\sin x^2}{x^2}$，故正确答案为B.

7. 【答案】C



【解析】如图，设过点P且平行底面的截面圆心为O_1，过点Q且平行底面的截面圆心为O_2，设圆柱底面半径为r，则$2\pi r=12$，$\therefore r=\dfrac{6}{\pi}$，$<\overrightarrow{O_1P},\overrightarrow{O_2Q}>=\dfrac{2+2}{\frac{6}{\pi}}=\dfrac{2}{3}\pi$，

$\because \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2Q}$，$\therefore |\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{PO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2Q}|^2=2r^2+|\overrightarrow{O_1O_2}|^2+2\overrightarrow{PO_1}\cdot\overrightarrow{O_2Q}=$

$=2\cdot(\dfrac{6}{\pi})^2+6^2+2\cdot(\dfrac{6}{\pi})^2\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=3\cdot\dfrac{36}{\pi^2}+36$，$\therefore |PQ|=\dfrac{6\sqrt{3+\pi^2}}{\pi}$，故正确答案为C

8. 【答案】D

【解析】设$M(x,y)$，$\because |MA|=2|MO|$，$\therefore |MA|^2=4|MO|^2$，$\therefore (x-3)^2+y^2=4(x^2+y^2)$，可得动点$M$的轨迹为圆$C$：$(x+1)^2+y^2=4$，$\because \angle PMQ\geq\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore$圆$C$内含于或内切于以$PQ$为直径的圆，设$PQ$的中点为$N$，则$|CN|\leq\dfrac{|PQ|}{2}-2$，$\therefore |PQ|\geq 2|CN|+4\geq 2\cdot\dfrac{|-1-3|}{\sqrt{2}}+4=4\sqrt{2}+4$，$\therefore$线段$PQ$长度的最小值为$4\sqrt{2}+4$，故正确选项为D.

9. 【答案】AD

【解析】$\because X$小于70的概率即$P(X<70)=P(X>110)=0.2$，

$\therefore P(90\leq X\leq 110)=P(X\geq 90)-P(X\geq 110)=0.5-0.2=0.3$，故选项A正确；

由题意可知$Y\sim B(10,0.3)$，$\therefore P(Y=1)=C_{10}^1\times 0.3\times 0.7^9=3\times 0.7^9$，故选项B错误；

$\because Y\sim B(10,0.3)$，$\therefore E(Y)=10\times 0.3=3, D(Y)=10\times 0.3\times(1-0.3)=2.1$，故选项C错误，选项D正确.

综上，正确选项为AD.

10. 【答案】BCD

【解析】已知椭圆的实半轴长$a=2$，虚半轴长$b=\sqrt{3}$，半焦距长$c=1$

ΔPF_1F_2的面积$S=\dfrac{1}{2}(2a+2c)\cdot n=\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot y_0$，所以$(a+c)\cdot n=c\cdot y_0$，所以$3n=y_0$，故选项A错误；

设ΔPF_1F_2的内切圆Q与PF_1,PF_2,F_1F_2的分别切于点A,B,D，则

$|PF_1|-|PF_2|=|AF_1|-|BF_2|=|DF_1|-|DF_2|=(c+m)-(c-m)=2m$，故选项B正确；

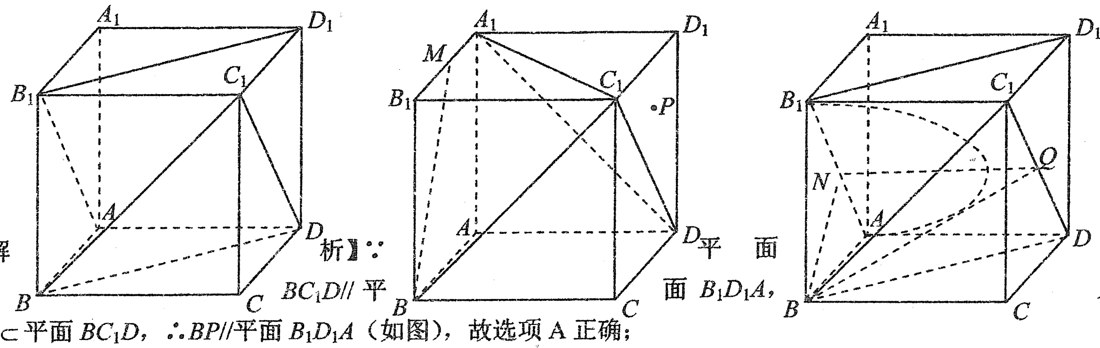
$\because |PF_1|+|PF_2|=2a$，联立$|PF_1|-|PF_2|=2m$，可得$|PF_1|=a+m=2+m$，

又$\because |PF_1|=\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0+1)^2+3(1-\dfrac{x_0^2}{4})}=2+\dfrac{x_0}{2}$，$\therefore 2+m=2+\dfrac{x_0}{2}$，$\therefore x_0=2m$，故选项C正确；

设$x_0=2\cos\theta, y_0=\sqrt{3}\sin\theta(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$，则$m+n=\dfrac{1}{2}x_0+\dfrac{1}{3}y_0=\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})$

$\therefore$ 当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时 $m+n$ 取得最大值 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，故选项 D 正确. 综上，正确选项为 BCD.

11. 【答案】ABD



【解析】$\because$ 平面 BC_1D// 平面 B_1D_1A，又 $BP\subset$ 平面 BC_1D，$\therefore BP$// 平面 B_1D_1A（如图），故选项 A 正确；

$\because BD_1\perp$ 平面 A_1C_1D，又 $\because BD_1\subset$ 平面 PBD_1，$\therefore$ 平面 $PBD_1\perp$ 平面 A_1C_1D（如图），故选项 B 正确；

$\because \angle MBD_1$ 为定值，$\therefore$ 满足 $\angle MBP=\angle MBD_1$ 的点 P 在以 B 为顶点，BM 为轴的圆锥的侧面上，又 P 在平面 CDD_1C_1 上，且 BM// 平面 CDD_1C_1，$\therefore P$ 点的运动轨迹是双曲线，故选项 C 错误；

$\because$ 设 AB_1，DC_1 中点分别为 N，Q，则点 A 的运动轨迹是平面 AB_1C_1D 内以 N 为圆心，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆（如图），$\because DC_1\perp NQ, DC_1\perp BQ$，$\therefore DC_1\perp$ 平面 BNQ，$\therefore$ 平面 $BDC_1\perp$ 平面 BNQ，设 NQ 与圆的交点分别为 E，F（点 E 位于点 F，Q 之间），易知当点 A 分别位于点 E，F 时，点 A 到平面 BDC_1 的距离分别取到最小值和最大值，且距离的最小值 $d_{\min}=(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})\cdot\sin\angle NQB=(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，距离的最大值 $d_{\max}=(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})\cdot\sin\angle NQB=(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\because \triangle BDC_1$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$V_{\min}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{\sqrt{2}}{12}$，$V_{\max}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

故选项 D 正确. 综上，正确选项为 ABD.

12. 【答案】ABD

【解析】$\because f'(x)=-xe^x$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图像在点 $(-a_n,f(-a_n))$ 处的切线为 $y=a_ne^{-a_n}(x+a_n)+(1+a_n)e^{-a_n}-1$，

令 $y=0$，解得 $x=-a_n-1+\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n}$，$\therefore e^{a_{n+1}}=\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n}$，$\therefore a_ne^{a_{n+1}}=e^{a_n}-1$，故选项 A 正确；

$\because a_ne^{a_{n+1}}=e^{a_n}-1\geq(a_n+1)-1=a_n$，$\therefore a_n(e^{a_{n+1}}-1)\geq 0$，$\because a_1>0$，$\therefore a_n>0$。

下证数列 $\{a_n\}$ 单调递减，即证 $e^{a_{n+1}}<e^{a_n}$，即证 $\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n}<e^{a_n}$，即证 $e^{a_n}-1<a_ne^{a_n}$，即证 $(1-a_n)e^{a_n}-1<0$，

即证 $f(a_n)<0$。$\because f'(x)=-xe^x$，当 $x>0$ 时 $f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

$\because a_n>0$，$\therefore f(a_n)<0$，$\therefore a_{n+1}<a_n$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 单调递减，$\therefore a_n\leq a_1=1$，且 $a_{2022}>a_{2023}$，故选项 B 正确，选项 C 错误；

$\because 1-\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$，要证 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n>1-\dfrac{1}{2^n}$，下证 $a_n>\dfrac{1}{2^n}$，只需证 $a_{n+1}>\dfrac{1}{2}a_n$，

即证 $a_ne^{a_{n+1}}>a_ne^{\frac{a_n}{2}}$，即证 $e^{a_n}-1>a_ne^{\frac{a_n}{2}}$，即证 $e^{\frac{a_n}{2}}-e^{-\frac{a_n}{2}}>a_n=2\ln e^{\frac{a_n}{2}}$，令 $x=e^{\frac{a_n}{2}}$，$\because 0<a_n\leq 1$，

$\therefore 1<x\leq\sqrt{e}$，则即证 $\ln x<\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{x})(1<x\leq\sqrt{e})$，令 $g(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{x})(1<x\leq\sqrt{e})$，

则 $g'(x)=\dfrac{-x^2+2x-1}{2x^2}<0$，$\therefore g(x)$ 在区间 $(1,e]$ 上单调递减，$\therefore g(x)<g(1)=0$，故选项 D 正确。

综上，正确选项为 ABD

13. 【答案】$\sqrt{2}$

【解析】$\because \overrightarrow{FH}\cdot\overrightarrow{FO}=|\overrightarrow{FH}|\cdot|\overrightarrow{FO}|\cos<\overrightarrow{FH},\overrightarrow{FO}>=b\cdot c\cos<\overrightarrow{FH},\overrightarrow{FO}>=b^2=a^2$，$\therefore c^2=2a^2$，$\therefore$ 离心率 $e=\sqrt{2}$

14. 【答案】(1, 4, 2) 或 (4, 1, 2)（写一个即可）

【解析】当 $m\geq 5$ 时，$m!$ 的尾数为 0，而 5^p 尾数为 5，$\therefore m,n\leq 4$，一一检验可得 $(m,n,p)=(1,4,2)$ 或 $(4,1,2)$.

15.【答案】$\left[\dfrac{\ln 2+1}{4},1\right)$

【解析】(解法一) $f(x)=\dfrac{\ln|x|+1}{x}-mx=0\Leftrightarrow\ln|x|+1-mx^2=0$，令 $h(x)=\ln|x|+1-mx^2$，则 $h(-x)=h(x)$，

$\therefore h(x)$ 为偶函数，$\therefore$ 只需考虑 $x>0$ 时 $h(x)=\ln x+1-mx^2$ 有两个零点 c,d，且在区间 (c,d) 存在唯一的整数. $x>0$ 时 $h(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{\ln x+1}{x^2}=m$，令 $g(x)=\dfrac{\ln x+1}{x^2}$，则 $g'(x)=-\dfrac{2\ln x+1}{x^3}$，当 $x\in(0,e^{-\frac{1}{2}})$ 时，$g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$ 单调递增，当 $x\in(e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 单调递减，$\because$ 在区间 (c,d) 存在唯一的整数，

$\therefore g(2)\leq m<g(1)$，即 $\dfrac{\ln 2+1}{4}\leq m<1$，$\therefore m$ 的取值范围为 $\left[\dfrac{\ln 2+1}{4},1\right)$.

（解法二）$f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{\ln|x|+1}{x}=mx$，令 $g(x)=\dfrac{\ln|x|+1}{x}$，则 $g(-x)=-g(x)$，$\therefore g(x)$ 为奇函数，

$\because h(x)=mx$ 也是奇函数，$\therefore$ 只需考虑 $x>0$ 时 $g(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$ 与 $h(x)=mx$ 有两个交点 $(c,g(c)),(d,g(d))$ 且在区间 (c,d) 存在唯一的整数. $g'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 单调递减，当直线 $h(x)=mx$ 过点 $(1,1)$ 时 $m=1$，当直线 $h(x)=mx$ 过点 $(2,\dfrac{\ln 2+1}{2})$ 时 $m=\dfrac{\ln 2+1}{4}$，$\because g(x)$ 与 $h(x)$ 有两个交点，且在区间 (c,d) 存在唯一的整数，$\therefore$ $\dfrac{\ln 2+1}{4}\leq m<1$，$\therefore m$ 的取值范围为 $\left[\dfrac{\ln 2+1}{4},1\right)$.

16. 【答案】$\sqrt{6}-\sqrt{3}$

【解析】解法一：记圆心为 O，由 $AC=OA=OC=\dfrac{1}{2}AB$ 知，$\triangle OAC$ 为等边三角形，记 $CE=a$，$CD=b$，$DE=c$，圆半径为 r，则 $S_{\triangle ECD}=\dfrac{1}{2}ab\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}ab$，又 $S_{\triangle ECD}=\dfrac{1}{2}c\cdot r\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}cr$，$\therefore\dfrac{\sqrt{2}}{4}ab=\dfrac{\sqrt{3}}{4}cr$，$\therefore c=\dfrac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{3}r}$ ①，

$\triangle CDE$ 中由余弦定理，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\dfrac{\pi}{4}$，即 $c^2=a^2+b^2-\sqrt{2}ab$ ②，由①②，$\dfrac{2a^2b^2}{3r^2}=a^2+b^2-\sqrt{2}ab$，

又 $a^2+b^2\geq 2ab$，$\therefore\dfrac{2a^2b^2}{3r^2}\geq(2-\sqrt{2})ab$，$\therefore ab\geq\dfrac{(2-\sqrt{2})\cdot 3r^2}{2}$，