



姓名_____

座位号_____

(在此卷上答题无效)

理科数学

本试卷共4页,22题。全卷满分150分,考试时间120分钟。

考生注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答:先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内,写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, 则 $A \cup (\complement_I B) =$
A. $\{0\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{0, 1, 2, 4\}$ D. $\{0, 1, 2, 3, 5\}$
2. 下列命题的否定是真命题的为
A. 任意两个等边三角形都相似
B. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 = 0$
C. 存在一个四边形,它的两条对角线互相垂直
D. $\forall x \in \mathbf{R}, x + |x| \geq 0$
3. 已知 $f(x) = \frac{\cos(\pi - x) \sin(\pi + x)}{\sin^2(\pi - x) - 1}$, 则 $f(\frac{2023\pi}{6}) =$
A. $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. 要建造一个容积为 300 m^3 , 深为 3 m 的长方体无盖蓄水池, 池壁的造价为 100 元/m^2 , 池底的造价为 150 元/m^2 , 则该蓄水池的最低造价为
A. 2.5 万元 B. 2.6 万元 C. 2.7 万元 D. 2.8 万元

理科数学试卷 第1页(共4页)



5. 将 $y = \sin 2x$ 图象上所有的点按向量 $a = \left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ 平移, 所得图像的解析式为

A. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

B. $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

C. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

D. $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

6. 当生物死亡后, 它的机体内原有的碳 14 含量会按确定的比率衰减(称为衰减率), 大约每经过 5730 年衰减为原来的一半, 这个时间称为“半衰期”, 则死亡生物体内碳 14 含量的年衰减率为 $p =$

A. $0.5^{\frac{1}{5730}}$

B. 0.5^{5730}

C. $1 - 0.5^{\frac{1}{5730}}$

D. $1 - 0.5^{5730}$

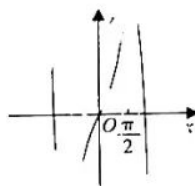
7. 已知函数 $f(x)$ 的部分图像如图, 则函数 $f(x)$ 的解析式可能为

A. $f(x) = (e^x - e^{-x}) \sin x$

B. $f(x) = (e^x + e^{-x}) \sin x$

C. $f(x) = (e^x - e^{-x}) \cos x$

D. $f(x) = (e^x + e^{-x}) \cos x$



8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 则 $a_{2022} =$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

9. 已知平面上两个定点 O, M 的距离为 2, 点 P 是单位圆 O 上一动点, 若 $|\vec{OP} \cdot \vec{PM}| = 2$, 则满足条件的点 P 的个数为

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

10. 设 $0 < x < 1, m = \lfloor \log_a(1-x) \rfloor, n = \lfloor \log_a(1+x) \rfloor$, 以下四个命题:

① 当 $0 < a < 1$ 时, $m > n$;

② 当 $0 < a < 1$ 时, $m < n$;

③ 当 $a > 1$ 时, $m > n$;

④ 当 $a > 1$ 时, $m < n$.

正确命题的序号是

A. ①③

B. ①④

C. ②③

D. ②④

11. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且满足 $f(2x) = f(2-2x), f(-x) = -f(x-2)$, 当 $x \in (-1, 1]$ 时, $f(x) = -x^2 + 1$, 则 $\sum_{i=1}^{2022} f(i) =$

A. 0

B. -1

C. 1

D. 2022

12. 已知函数 $f(x) = \cos \omega x - \sin \omega x (\omega > 0)$ 的图象过点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$, 且 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 内有且只有两个极值点,

则 $\omega =$

A. 1

B. 5

C. 9

D. 13



二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知公差为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_5 = S_{10}$, 则 $a_8 =$ _____.

14. 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 2$, 则 $\tan\alpha =$ _____, $\cos 2\alpha =$ _____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 P 满足 $\vec{AB} + \vec{AC} = 4\vec{AP}$, 则 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = a^x - x^2$ ($a > 1$) 有三个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知集合 $A = \{x | x^2 - 8x + 12 < 0\}$, 非空集合 $B = \{x | x^2 + (a-2)x - 2a < a^2(x-2)\}$.

(1) 求集合 A ;

(2) 记条件 $p: x \in A, q: x \in B$, 且 p 是 q 必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2a_n - n$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 求证: 数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列;

(2) 求证: $\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k+1} < 1$.

19. (12 分)

已知向量 $a = \left(\sin x, \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)$, $b = \left(\sin x, \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)$, $f(x) = a \cdot b$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, 求 $f(x)$ 的最大值与最小值.

20. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $BC=4, AC=6, \cos C = -\frac{9}{16}$.

(1) 求证: $B=2A$;

(2) 若 $\vec{AD} = \lambda \vec{AC}$, $|\vec{BD}| = \sqrt{14}$, 求实数 λ 的值.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - x - a \ln x$ ($a > 0$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) ①若 $f(x) \geq 0$, 求实数 a 的值;

②设 $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) > \ln(n+1)$.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^{2x}$, 直线 $l: y = 2x + b$ 与曲线 $y = f(x)$ 相切.

(1) 求实数 b 的值;

(2) 若曲线 $y = af(x)$ 与直线 l 有两个公共点, 其横坐标分别为 m, n ($m < n$).

①求实数 a 的取值范围;

②证明: $f(m) \cdot f(n) > 1$.

理科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	D	C	A	C	B	D	B	A	B	C

1. 【解析】 $\complement_I B = \{0, 3, 5\}$, $A \cup (\complement_I B) = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, 故选 D.

2. 【解析】显然 A, C, D 中的命题为真命题，故其否定为假命题。B 的命题为假命题，故其否定为真命题，故选 B.

3. 【解析】由已知得 $f(x) = \frac{\cos x \sin x}{\sin^2 x - 1} = -\tan x$, 所以 $f\left(\frac{2023\pi}{6}\right) = -\tan \frac{2023\pi}{6} = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

故选 D.

4. 【解析】设水池底面的长宽分别为 x, y m, 则 $xy = 100$. 造价为 $M = 6(x + y) \times 100 + xy \times 150 \geq 27000$,

故选 C.

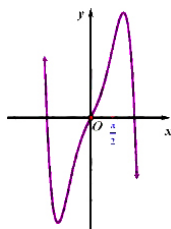
5. 【解析】即将 $y = \sin 2x$ 图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，向上平移 1 个单位，其解析式为

$$y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1, \text{ 故选 A.}$$

6. 【解析】由已知得： $(1-p)^{5730} = \frac{1}{2}$, 故 $p = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}$, 所以选 C.

7. 【解析】由于图像关于原点对称，所以 $f(x)$ 为奇函数，故排除 AD. 由图知 $f(x)$ 图

象不经过点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 故排除 C, 故选 B.

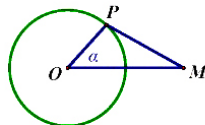


8. 【解析】由 $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 得 $a_{n+3} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n}$, 故 $a_{n+6} = a_n$, $\{a_n\}$ 是周期为 6 的数列.

$a_1 = 2, a_2 = 3$, 所以 $a_3 = \frac{3}{2}, a_4 = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{1}{3}, a_6 = \frac{2}{3}$, 故 $a_{2022} = a_6 = \frac{2}{3}$, 故选 D.

9. 【解析】设 $\angle POM = \alpha, \alpha \in [0, \pi]$,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}) = 2 \cos \alpha - 1,$$



当 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PM} = 2$ 时, $\cos \alpha = \frac{3}{2} > 1$, α 不存在;

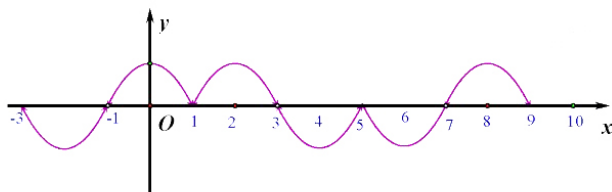
当 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PM} = -2$ 时, $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, 此时存在两个点. 故选 B.

10. 【解析】当 $a > 1$ 时, $|\log_a(1-x)| - |\log_a(1+x)| = -\log_a(1-x^2) > 0$, 所以 $|\log_a(1-x)| > |\log_a(1+x)|$.

当 $0 < a < 1$ 时, $|\log_a(1-x)| - |\log_a(1+x)| = \log_a(1-x^2) > 0$, 所以 $|\log_a(1-x)| > |\log_a(1+x)|$.

故选 A.

11. 【解析】由已知函数 $f(x)$ 图像关于 $x=1$ 及点 $(-1, 0)$ 对称, 故 $T=8$. 如图.



所以 $f(1) = f(3) = f(5) = f(7) = 0$, $f(2) = f(8) = 1$, $f(4) = f(6) = -1$;

$\sum_{i=1}^{2022} f(x_i) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = -1$, 故选 B.

12. 【解析】 $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$, $f(x) = 0$, 所以 $\omega = 4k+1, k \in \mathbb{N}$.

当 $\omega = 1$ 时, $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 内为减函数, 无极值点;

当 $\omega = 5$ 时, $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 内有一个极值点 $\frac{3\pi}{20}$;

当 $\omega = 9$ 时, $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(9x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 内有极小值点 $\frac{\pi}{12}$, 极大值点为 $\frac{7\pi}{36}$, 满足题意;

当 $\omega = 13$ 时 $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(13x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 内有三个极值点 $\frac{3\pi}{52}$, $\frac{7\pi}{52}$, $\frac{11\pi}{52}$ 不满足题意.

故选 C.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 0 【解析】由已知得 $a_6 + \dots + a_{10} = 0$, 故 $a_6 + a_{10} = 2a_8 = 0$, 故 $a_8 = 0$.

14. $-\frac{1}{2}; \frac{3}{5}$ (答对1空给2分, 全对给5分) 【解析】 $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$, 所以 $\cos\alpha = -2\sin\alpha$,

故 $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{3}{5}$.

15. $\frac{1}{4}$ 【解析】取 BC 中点 D , 则 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$, 故 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AP}$, 所以 P 是中线 AD 的中点.

所以 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为 $\frac{1}{4}$.

16. $\left(1, e^{\frac{2}{e}}\right)$ 【解析】当 $x \leq 0$ 时, $y = a^x, y = x^2$ 显然有一个交点, 即 $f(x)$ 有一个零点.

当 $x > 0$ 时, $f(x) = 0$ 得 $\ln a = \frac{2\ln x}{x}$, 令 $g(x) = \frac{2\ln x}{x}$, $g'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}$.

故 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 递增, 在 $(e, +\infty)$ 递减. $g(x)_{\max} = g(e) = \frac{2}{e}$.

所以 $0 < \ln a < \frac{2}{e}$, 故实数 a 的取值范围是 $\left(1, e^{\frac{2}{e}}\right)$.

三. 解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、解答过程或演算步骤.

17. 【解析】(1) 解方程 $x^2 - 8x + 12 = 0$, 得两根为 2 和 6, 2 分

所以不等式 $x^2 - 8x + 12 < 0$ 的解为 $2 < x < 6$.

故 $A = \{x | 2 < x < 6\}$ 4 分

(2) $x^2 + (a-2)x - 2a < a^2(x-2)$ 化为 $x^2 - (a^2 - a + 2)x + 2(a^2 - a) < 0$

由 $x^2 - (a^2 - a + 2)x + 2(a^2 - a) = 0$ 解得 $x_1 = 2, x_2 = a^2 - a$.

由于 B 非空, 故 $a^2 - a \neq 2$, 故 $a \neq -1, a \neq 2$ 6 分

因为 p 是 q 必要不充分条件, 则 B 是 A 的真子集, 此时 $B = \{x | 2 < x < a^2 - a\}$ 8 分

所以 $2 < a^2 - a < 6$, 即 $\begin{cases} a^2 - a > 2 \\ a^2 - a < 6 \end{cases}$, 解得 $-2 < a < -1$ 或 $2 < a < 3$.

故实数 a 的取值范围是 $(-2, -1) \cup (2, 3)$10 分

18. 【解析】(1) 由已知得 $S_{n+1} = 2a_{n+1} - (n+1)$, 又 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

所以 $a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n - 1$, 故 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 2 分

所以 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ 4 分

又当 $n=1$ 时, $S_1 = 2a_1 - 1$, 又 $S_1 = a_1$, 故 $a_1 = 1$.

故数列 $\{a_n + 1\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列5 分

(2) 由 (1) 可知: $a_n + 1 = 2^n$, 故 $a_n = 2^n - 1$ 6 分

所以 $\frac{2^k}{a_k a_{k+1}} = \frac{(2^{k+1} - 1) - (2^k - 1)}{(2^k - 1)(2^{k+1} - 1)} = \frac{1}{2^k - 1} - \frac{1}{2^{k+1} - 1}$ 8 分

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{a_k a_{k+1}} &= \frac{2}{a_1 a_2} + \frac{2^2}{a_2 a_3} + \frac{2^3}{a_3 a_4} + \cdots + \frac{2^k}{a_k a_{k+1}} + \cdots + \frac{2^n}{a_n a_{n+1}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^2 - 1}\right) + \left(\frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{2^3 - 1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k - 1} - \frac{1}{2^{k+1} - 1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}\right) \cdots \cdots 10 \text{ 分} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1} < 1 \end{aligned}$$

综上所述: $\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{a_k a_{k+1}} < 1$ 12 分

19. 【解析】(1) $a \cdot b = \sin^2 x + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 2 分

$$= \sin^2 x - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) - \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

所以 $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 4 分

故 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \pi$6 分

(2) 因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$, 所以 $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

所以 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right]$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)$ 单调递减; 8 分

$x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right]$, $f(x)$ 单调递增. 10 分

当 $x = -\frac{\pi}{6}$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$, $f(x)$ 的最小值为 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$,

当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, $f(x)$ 的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

故 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 最小值 $-\frac{1}{2}$ 12 分

20. 【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C = 36 + 16 - 27 = 25,$$

所以 $AB = 5$ 2 分

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{25 + 16 - 36}{2 \times 5 \times 4} = \frac{1}{8},$$
 3 分

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{25 + 36 - 16}{2 \times 5 \times 6} = \frac{3}{4}$$
 4 分

$$\text{所以 } \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$$

因为 A, B 为三角形的内角, 且 $\cos B = \cos 2A$, 所以 $B = 2A$ 6 分

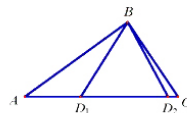
(2) 因为 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{14} < 4$, 所以点 D 在 AC 上. 7 分

由 (1) 知 $\cos A = \frac{3}{4}$, 设 $AD = x$,

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理知:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A,$$

化简得: $2x^2 - 15x + 22 = 0$.



解得 $x = \frac{11}{2}$ 或 $x = 2$ 。10 分

当 $x = 2$ 时, $AD = 2$, $\lambda = \frac{1}{3}$;

当 $x = \frac{11}{2}$ 时, $AD = \frac{11}{2}$, $\lambda = \frac{11}{12}$ 。

综合上述, $\lambda = \frac{1}{3}$ 或 $\lambda = \frac{11}{12}$ 。12 分

21. 【解析】(1) 由已知 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 。

$$f'(x) = 2x - 1 - \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - x - a}{x} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{令 } g(x) = 2x^2 - x - a, \Delta = 1 + 8a > 0$$

$$g(x) = 0 \text{ 有两根 } x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 8a}}{4}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 8a}}{4} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } a > 0, \quad x_1 \leq 0, x_2 \geq \frac{1}{2}.$$

$x \in (0, x_2)$ 时, $g(x) < 0$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

$x \in (x_2, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

故函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1 + \sqrt{1 + 8a}}{4}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 8a}}{4}, +\infty\right)$ 单调递增。4 分

(2) ① 因为 $f(1) = 0$, 所以 $f(x) \geq 0$ 等价于 $f(x) \geq f(1)$ 。

由 (1) 知: $f(x)_{\min} = f(x_2)$ 。

当 $a = 1$ 时, $x_2 = 1$, 故 $f(x) \geq f(1) = 0$ 满足题意。6 分

当 $a > 1$ 时, $x_2 > 1$, $x \in (1, x_2)$, 故 $f(x) < f(1) = 0$ 不满足题意.

当 $0 \leq a < 1$ 时, $\frac{1}{2} \leq x_2 < 1$, $x \in (x_2, 1)$, 故 $f(x) < f(1) = 0$ 不满足题意.

综上所述： $a = 1$ 8 分

②由①可知： $a = 1$ 时， $f(x) \geq 0$ ，

即 $x^2 - x \geq \ln x$ ，当且仅当 $x = 1$ 时取等号.

故当 $x = \frac{n+1}{n}$ 时，可得 $\frac{n+1}{n^2} > \ln \frac{n+1}{n}$ ，即 $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > \ln(n+1) - \ln n$ 10 分

$$\begin{aligned} \text{故} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) &= 2 + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\ &> (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 4 - \ln 3) + \cdots + [\ln(n+1) - \ln n] = \ln(n+1). \end{aligned}$$

$$\text{故} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) > \ln(n+1). \quad \text{.....12 分}$$

22. 【解析】(1) 设直线 l 与曲线 $y = f(x)$ 的切点坐标为 (x_0, e^{2x_0}) ，

由 $f'(x) = 2e^{2x}$ ，得 $f'(x_0) = 2e^{2x_0}$.

故切线方程为： $y - e^{2x_0} = 2e^{2x_0}(x - x_0)$ 2 分

即 $y = 2e^{2x_0}x + (1 - 2x_0)e^{2x_0}$

切线方程为 $y = 2x + b$ ，所以 $\begin{cases} 2e^{2x_0} = 2 \\ b = (1 - 2x_0)e^{2x_0} \end{cases}$

解得 $x_0 = 0$ ， $b = 1$

故实数 $b = 1$ 4 分

(2) 由 (1) 知 $l: y = 2x + 1$.

①问题等价于 $ae^{2x} = 2x + 1$ ，即 $a = (2x + 1)e^{-2x}$ 有两个实数根.

令 $\varphi(x) = (2x + 1)e^{-2x}$ ，则 $\varphi'(x) = -4xe^{-2x}$ 6 分

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $\varphi'(x) > 0$ ， $\varphi(x)$ 单调递增；

当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $\varphi'(x) < 0$ ， $\varphi(x)$ 单调递减.

$$\varphi(x)_{\max} = \varphi(0) = 1$$

又 $x \rightarrow +\infty, \varphi(x) \rightarrow 0$, 且 $x \rightarrow -\infty, \varphi(x) \rightarrow -\infty$

故实数 a 的取值范围是 $(0, 1)$8 分

② $f(m)f(n) > 1$, 即 $e^{2(m+n)} > 1$ 等价于 $m+n > 0$.

令 $F(x) = \varphi(x) - \varphi(-x)$ ($x > 0$)

$$F'(x) = \varphi'(x) + \varphi'(-x) = -4xe^{-2x} - 4(-x)e^{2x} = 4x(e^{2x} - e^{-2x})$$

因为 $x > 0$, 所以 $e^{2x} > e^{-2x}$, 故 $F'(x) > 0$

所以 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $F(x) > F(0) = 0$ 10 分

不妨设 $m < 0 < n$, 故 $F(n) > 0$, 即 $g(n) > g(-n)$.

由已知 $g(m) = g(n) = a$, 所以 $g(m) > g(-n)$.

由①知: 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $g(x)$ 单调递增.

故 $m > -n$, 所以 $m+n > 0$.

所以 $f(m)f(n) > 1$12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线