保密★使用前

泉州市 2023 届高中毕业班质量监测（三）

2023.03

高三数学选择题参考解答

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{x\mid -5<x<2\}$，$B=\{x\mid |x|<3\}$，则 $A\cup B=$

A．$(-\infty,2)$　　B．$(-\infty,3)$　　C．$(-3,2)$　　D．$(-5,3)$

【命题意图】本小题考查集合的运算，不等式等基础知识；考查运算求解等能力；考查化归与转化等思想；体现基础性，导向对数学运算等素养的关注．

【试题解析】由已知，得 $B=\{x\mid |x|<3\}=\{x\mid -3<x<3\}$，则 $A\cup B=(-5,3)$．

故选D．

2．已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=4\mathrm{i}$，则 $z\cdot\overline{z}=$

A．-8　　B．0　　C．8　　D．$8\mathrm{i}$

【命题意图】本小题主要考查复数的运算及其复数的模等基础知识；考查运算求解等能力；考查化归与转化等思想；体现基础性，导向对数学运算等核心素养的关注．

【试题解析】

解法一： 因为 $(1-\mathrm{i})z=4\mathrm{i}$，所以 $(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})z=4\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$，即 $2z=-4+4\mathrm{i}$，所以 $z=-2+2\mathrm{i}$，

所以 $z\cdot\overline{z}=(-2+2\mathrm{i})(-2-2\mathrm{i})=8$．　故选 C．

解法二： 由 $(1-\mathrm{i})z=4\mathrm{i}$，可得 $|1-\mathrm{i}||z|=|4\mathrm{i}|$，故 $|z|=2\sqrt{2}$，$z\cdot\overline{z}=|z|^2=8$．　故选 C．

3．已知 $\sin\alpha-\sqrt{2}\cos\alpha=0$，则 $\cos2\alpha=$

A．$-\dfrac{1}{3}$　　B．0　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

【命题意图】本小题主要考查同角三角函数关系，二倍角等基础知识；考查运算求解等能力；

考查化归与转化等思想；体现基础性，导向对数学运算等核心素养的关注.

【试题解析】由 $\sin\alpha-\sqrt{2}\cos\alpha=0$，可知 $\tan\alpha=\sqrt{2}$，

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{1}{3}.$$

故选 A.

4．某运动员每次射击击中目标的概率均相等，若三次射击中，至少有一次击中目标的概率为 $\frac{63}{64}$，则射击一次，击中目标的概率为

A．$\frac{7}{8}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{8}$

【命题意图】本小题考查事件的概率，相互独立事件等基础知识；考查抽象概括，运算求解等能力；考查化归与转化等思想；体现基础性，导向对数学抽象，数学运算等核心素养的关注.

【试题解析】设该运动员射击一次，击中目标的概率为 p，

则该运动员三次射击均不击中目标的概率 $P_0=(1-p)^3$，

则三次射击中，至少有一次击中的概率 $P=1-P_0=1-(1-p)^3=\frac{63}{64}$，

计算可得 $p=\frac{3}{4}$，

故选B.

5．已知抛物线 C 的焦点为 F，准线为 l，点 A 在 C 上，点 B 在 l 上．若 $|\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{BF}|=4$，$\overrightarrow{AF}\cdot(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA})=0$，则 F 到 l 的距离等于

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【命题意图】本小题主要考查抛物线的定义，向量的基本运算及其几何意义等基础知识；考查推理论证等能力；考查数形结合，化归与转化等思想；体现基础性，综合性，导向对直观想象，逻辑推理等核心素养的关注.

【试题解析】取 AF 的中点 M，连结 BM．过 F 作 $FE\perp l$ 于点 E，

则 $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BM}$，

又因为 $\overrightarrow{AF}\cdot(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA})=0$，所以 $AF\perp BM$，

所以 $|BA|=|BF|$．

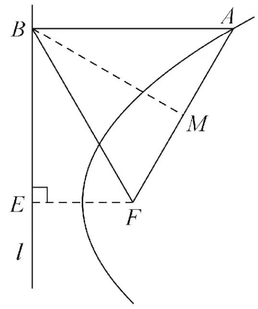
依题意 $|AF|=|BF|$，所以 $\triangle ABF$ 为等边三角形．

由抛物线的定义，得 $AB\perp l$，所以 $AB//EF$．

所以 $\angle EFB=\angle ABF=60^\circ$，所以 $|EF|=\frac{1}{2}|BF|=2$．

即 F 到 l 的距离为 2．

故选 B．



6．定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x)+f(x)=0$，且当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=\sqrt{x}-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-\frac{9}{4},f(-\frac{9}{4}))$ 处的切线方程为

A．$4x-4y+11=0$　　B．$4x+4y+11=0$

C．$4x-4y+7=0$　　D．$4x+4y+7=0$

【命题意图】本小题主要考查函数的基本性质与导数的几何意义等基础知识；考查运算求解，推理论证能力等；考查数形结合思想，化归与转化思想等；体现基础性，综合性，导向对直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养的关注．

【试题解析】由 $f(2-x)+f(x)=0$，得 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，

又 $f(x)$ 为偶函数，故其图象关于 y 轴对称，

则 $f(2-x)=-f(x)=-f(-x)$，可得 $f(x+4)=f(x)$，

故 $f(x)$ 的周期为 4．则 $f(-\frac{9}{4})=f(\frac{7}{4})=-f(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$，

又由图象对称性，可得 $f'(-\frac{9}{4})=f'(\frac{7}{4})=f'(\frac{1}{4})=1$，

故曲线 $y=f(x)$ 在 $(-\frac{9}{4},f(-\frac{9}{4}))$ 处的切线方程为 $y-\frac{1}{2}=x+\frac{9}{4}$，

化简得 $4x-4y+11=0$． 故选 A．

7．图1中，正方体 $ABCD-EFGH$ 的每条棱与正八面体 $MPQRSN$（八个面均为正三角形）的一条棱垂直且互相平分．将该正方体的顶点与正八面体的顶点连结，得到图2的十二面体，该十二面体能独立密铺三维空间．若 $AB=1$，则点 M 到直线 RG 的距离等于

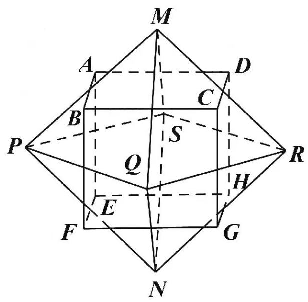


图 1

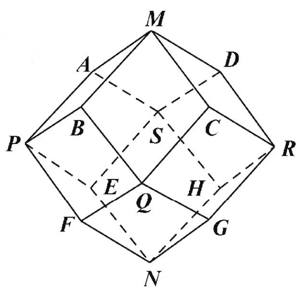


图 2

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

【命题意图】本小题主要考查基本立体图形，空间中点、线、面的位置关系与度量关系等基础知识；考查空间想象，抽象概括，推理论证，运算求解等能力；考查化归与转化等思想；体现基础性，应用性，导向对直观想象，数学抽象，逻辑推理，数学运算等核心素养的关注．

【试题解析】

解法一： 如解析图 1，设 AB 与 MP 交于点 K， RN 与 GH 交于点 T，连结 KT．

依题意，由图形特征，在正八面体 $MPQRSN$ 中， $MP=PN=NR=RM$，

由对称性可知 $MN=PR$，所以四边形 $MPNR$ 是正方形，则 $MR\perp RN$，

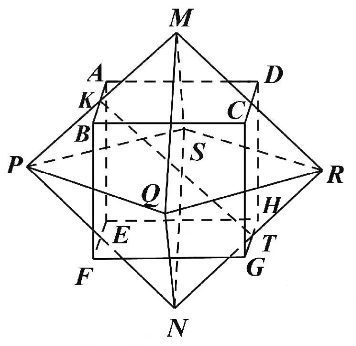
又 $MR\perp CD$， $CD//GH$，所以 $MR\perp GH$，

$RN\cap GH=T$，所以 $MR\perp$ 平面 $RGNH$，所以 $MR\perp RG$．

由已知四边形 $MKTR$ 是矩形，所以 $MR=KT=\sqrt{2}$，

所以 M 到直线 RG 的距离为 $\sqrt{2}$．

故选 A．



解析图1

解法二： 如解析图 2，设 AB 与 MP 交于点 K， RN 与 GH 交于点 T，连结 KT，RG, MT, MG．

依题意，由图形特征，在正八面体 $MPQRSN$ 中， $MP=PN=NR=RM$，

由对称性可知 $MN=PR$，所以四边形 $MPNR$ 是正方形，则 $MR\perp RN$，

四边形 $MKTR$ 是矩形，所以 $MR=KT=\sqrt{2}$；

在 $\mathbf{Rt}\triangle RTG$ 中， $RT=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, TG=\dfrac{1}{2}$， 所以 $RG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

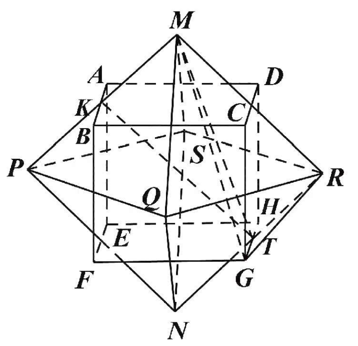
由已知，显然 $GH\perp$平面 $PMRN$，所以 $GT\perp MT$，

则在 $\mathbf{Rt}\triangle MTG$ 中， $MT=\dfrac{\sqrt{10}}{2}, TG=\dfrac{1}{2}$， 所以 $MG=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$；

则 $RG^2+MR^2=MG^2$，所以 $MR\perp RG$．

所以 M 到直线 RG 的距离为 $\sqrt{2}$．

故选 A．



解析图2

解法三： 如解析图3，设 AB 与 MP 交于点 K，RN 与 GH 交于点 T，连结 KT.

依题意，由图形特征，在正八面体 $MPQRSN$ 中，$MP=PN=NR=RM$，

由对称性可知 $MN=PR$，所以四边形 $MPNR$ 是正方形，所以 $MN\perp PR$；

同理：四边形 $PQRS$ 是正方形，$QS\perp PR$；

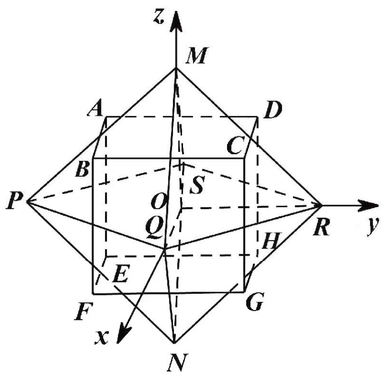
四边形 $MQNS$ 是正方形，$QS\perp MN$；

以正八面体中心 O 为坐标原点，OQ,OR,OM 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系.

$M(0,0,1)$，$R(0,1,0)$，$G(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{MR}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{RG}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，

则 $\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{RG}=0$，则 M 到直线 RG 的距离为 MR，$MR=\sqrt{2}$.

故选 A.



解析图 3

8．已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-1$，则 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ 的最小值为

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．4

【命题意图】本小题主要考查向量的模、数量积等基础知识；考查运算求解等能力；考查数形结合，化归与转化等思想；体现基础性，综合性与创新性；导向对直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养的关注.

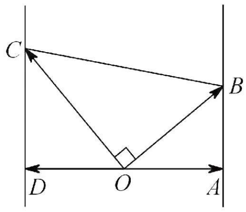
【试题解析】

解法一： 设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}$.

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-1$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，

所以由向量数量积的几何意义，可得 $AB\perp OA$， $DC\perp DO$， $OB\perp OC$，如图.

因为 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{CB}|$，



$|\overrightarrow{CB}|$ 为夹在两平行直线 AB 与 CD 间的线段长，

所以当 $BC\perp AB$ 时， $|\overrightarrow{CB}|$ 取到最小值 2 .

故 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ 的最小值为 2 .

故选 C.

解法二： 在直角坐标系 xOy 中，设 $\boldsymbol{a}=(1,0)$， $\boldsymbol{b}=(x_1,y_1)$， $\boldsymbol{c}=(x_2,y_2)$.

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-1$， $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，

所以 $x_1=1$， $x_2=-1$， $x_1x_2+y_1y_2=0$， 即 $y_1y_2=1$.

所以 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}=\sqrt{y_1^2+y_2^2+2}\geqslant\sqrt{2y_1y_2+2}=2$，

当且仅当 $y_1=y_2=1$ 或 $y_1=y_2=-1$ 时，等号成立.

故 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ 的最小值为 2 .

故选C.

解法三： 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$， $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 $\beta(\frac{\pi}{2}<\beta<\pi)$.

因为 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-1<0$， 所以 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$.

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-1$， $|\boldsymbol{a}|=1$，

所以 $|\boldsymbol{b}|\cos\alpha=1$， $|\boldsymbol{c}|\cos\beta=-1$， 所以

$$|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\geqslant\frac{2}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=2,$$

当且仅当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，等号成立． 故 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ 的最小值为 2 .

故选 C.

解法四： 由于 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$， 可得 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2}=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$

由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-1$， 可得 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=2=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|\times\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}>$

所以 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=\dfrac{2}{\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}>}\geq 2$

当且仅当 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}>=0$，且要满足条件 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$ 时等号成立

所以 $\left|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\right|=\left|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\right|\geq 2$ 故 $\left|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\right|$ 的最小值为 2.

故选C.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9．已知 AB 为圆 $C:x^2+y^2=4$ 的直径，直线 $l:y=kx+1$ 与 y 轴交于点 M，则

A． l 与 C 恒有公共点　　B． $\triangle ABM$ 是钝角三角形

C． $\triangle ABM$ 的面积的最大值为 1　　D． l 被 C 截得的弦的长度的最小值为 $2\sqrt{3}$

【命题意图】本小题主要考查直线与圆的方程，直线与圆的位置关系等基础知识；考查推理论证，运算求解等能力；考查函数与方程、数形结合等思想；体现基础性、综合性、应用性，导向对发展直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养的关注.

【试题解析】由题意可得 $M(0,1)$.

对于A选项，因为 $M(0,1)$ 在 C 内，所以 l 与 C 恒有公共点，故A正确；

对于B选项，因为 $M(0,1)$ 在 C 内，所以 $\angle AMB>90^\circ$，故B正确；

对于C选项，当 $CM\perp AB$ 时，$S_{\triangle ABM}=\dfrac{1}{2}\times 4\times 1=2$，故C错误；

对于D选项，因为 C 到 l 的距离 $d\leqslant\left|CM\right|=1$，

所以 l 被 C 截得的弦长为 $2\sqrt{4-d^2}\geqslant 2\sqrt{3}$，当 $d=1$ 时，等号成立，故D正确.

故选ABD.

10．已知函数 $f(x)=\sin x\cos x$，$g(x)=\sin x+\cos x$，则

A． $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 单调递增

B． $f(x)$ 的图象可由 $g(x)$ 的图象平移得到

C． $f(x)$ 图象的对称轴均为 $g(x)$ 图象的对称轴

D．函数 $y=f(x)+g(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

【命题意图】本小题主要考查三角函数图象及性质、三角恒等变换等基础知识；考查推理论证，运算求解等能力；考查数形结合，化归与转化等思想；体现基础性、综合性，导向对数学运算、直观想象等核心素养的关注.

【试题解析】$f(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，$g(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$.

对于 A 选项，由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}<2x<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

可得 $f(x)$ 的单调增区间为 $(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}),k\in\mathbf{Z}$；

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

可得 $g(x)$ 的单调增区间为 $(2k\pi-\frac{3\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}),k\in\mathbf{Z}$.

故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 单调递增，故 A 正确；

对于 B 选项，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的周期及最值均不相同，故 $f(x)$ 的图象无法由 $g(x)$ 的图象平移得到，故 B 错误；

对于 C 选项，由 $2x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，可得 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$；

由 $x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，可得 $g(x)$ 的对称轴为 $x=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，

因而 $f(x)$ 图象的对称轴不全是 $g(x)$ 图象的对称轴，故 C 错误；

对于 D 选项，$y=f(x)+g(x)=\sin x\cos x+\sin x+\cos x$，

令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，则 $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，

则 $y=\sin x\cos x+\sin x+\cos x=\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2-1$，

$t=\sqrt{2}$ 时，$y_{\max}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$，故 D 正确.

故选 AD.

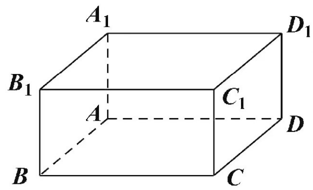
11．在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=2$，$AA_1=1$，点 P,Q 在底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内，直线 AP 与该长方体的每一条棱所成的角都相等，且 $AP\perp CQ$，则

A．$AP=\sqrt{2}$

B．点 Q 的轨迹长度为 $\sqrt{2}$

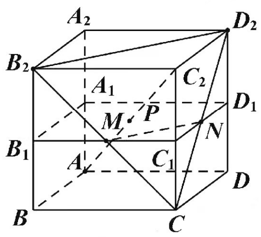
C．三棱锥 $D-A_1QB$ 的体积为定值

D．AP 与该长方体的每个面所成的角都相等



【命题意图】本小题主要考查直线与直线、直线与平面的位置关系，空间几何体的体积等基础知识；考查推理论证，空间想象，运算求解等能力；考查数形结合，化归与转化等思想；体现基础性、综合性，导向对数学运算，直观想象，逻辑推理等核心素养的关注.

【试题解析】如图，将长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 补成正方体 $ABCD-A_2B_2C_2D_2$，连结 B_2D_2,B_2C,CD_2,AC_2，B_2C 交 B_1C_1 于点 M，CD_2 交 C_1D_1 于点 N，



因为直线 AC_2 与正方体 $ABCD-A_2B_2C_2D_2$ 的每一条棱所成的角都相等，所以 AC_2 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交点即为点 P.

对于 A 选项，$AP=\frac{1}{2}AC_2=\sqrt{3}$，故 A 错误；

对于 B 选项，因为 $AC_2 \perp CB_2$， $AC_2 \perp CD_2$，且 $CB_2 \cap CD_2 = C$，

所以 $AC_2 \perp$ 平面 CD_2B_2，即 $AP \perp$ 平面 CMN，

因为 $AP \perp CQ$，所以 $CQ \subset$ 平面 CMN，即 $Q \in$ 平面 CMN，又 $Q \in$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

所以 $Q \in$ 平面 $CMN \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = MN$，所以点 Q 的轨迹为线段 MN，

所以线段 $MN = \sqrt{2}$，故 B 正确；

对于 C 选项，记 Q 到面 A_1BD 的距离为 h， $V_{D-A_1QB} = V_{Q-A_1BD} = \frac{1}{3}S_{\triangle A_1BD} \cdot h$，

因为 $MN // BD$，所以点 Q 到面 A_1BD 的距离是定值，

又 $\triangle A_1BD$ 的面积是定值，所以三棱锥 $D - A_1QB$ 的体积为定值，故 C 正确；

对于 D 选项， AP 与长方体的每一个面所成的角即为 AC_2 与正方体每一个面所成的角；易知 AC_2 与正方体每一个面所成的角相等，所以 AP 与长方体的每一个面所成角也都相等，故 D 正确；

故选 BCD.

12．某商场设有电子盲盒机，每个盲盒外观完全相同，规定每个玩家只能用一个账号登陆，且每次只能随机选择一个开启．已知玩家第一次抽盲盒，抽中奖品的概率为 $\frac{2}{7}$，从第二次抽盲盒开始，若前一次没抽中奖品，则这次抽中的概率为 $\frac{1}{2}$，若前一次抽中奖品，则这次抽中的概率为 $\frac{1}{3}$．记玩家第 n 次抽盲盒，抽中奖品的概率为 P_n，则

A． $P_2 = \frac{19}{42}$　　　　B．数列 $\{P_n - \frac{3}{7}\}$ 为等比数列

C． $P_n \leqslant \frac{19}{42}$　　　　D．当 $n \geqslant 2$ 时， n 越大， P_n 越小

【命题意图】本小题考查全概率公式，数列的递推关系，数列的通项公式等基础知识；考查抽象概括，推理论证，运算求解等能力；考查化归与转化，函数与方程等思想；体现应用性、创新性、综合性，导向对数学建模，数学抽象，逻辑推理，数学运算等核心素养的关注．

【试题解析】记玩家第 i 次抽盲盒并抽中奖品为事件 A_i，

依题意，$P_1=\frac{2}{7}$，$P\left(A_n|A_{n-1}\right)=\frac{1}{3}$，$P\left(A_n|\overline{A_{n-1}}\right)=\frac{1}{2}$．

对于A选项，$P\left(A_2\right)=P\left(A_1A_2\cup\overline{A_1}A_2\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2|A_1\right)+P\left(\overline{A_1}\right)P\left(A_2|\overline{A_1}\right)$

$$=\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}+(1-\frac{2}{7})\times\frac{1}{2}=\frac{19}{42},$$

即 $P_2=\frac{19}{42}$，故A正确；

对于 B 选项，$P\left(A_n\right)=P\left(A_{n-1}A_n\cup\overline{A_{n-1}}A_n\right)=P\left(A_{n-1}\right)P\left(A_n|A_{n-1}\right)+P\left(\overline{A_{n-1}}\right)P\left(A_n|\overline{A_{n-1}}\right)$．

因此 $P_n=\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{2}\left(1-P_{n-1}\right)$，即 $P_n=-\frac{1}{6}P_{n-1}+\frac{1}{2}$，所以 $P_n-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}(P_{n-1}-\frac{3}{7})$，

又 $P_1=\frac{2}{7}$，即 $P_1-\frac{3}{7}=-\frac{1}{7}\neq 0$，

所以 $\{P_n-\frac{3}{7}\}$ 为首项为 $\frac{2}{7}$，公比为 $-\frac{1}{6}$ 的等比数列，故 B 正确；

对于 C 选项，由 $\{P_n-\frac{3}{7}\}$ 为等比数列，可得 $P_n-\frac{3}{7}=(-\frac{1}{7})\cdot(-\frac{1}{6})^{n-1}$，

即 $P_n=(-\frac{1}{7})\cdot(-\frac{1}{6})^{n-1}+\frac{3}{7}$，

当 n 为奇数时，$P_n=-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6^{n-1}}+\frac{3}{7}$，因为 $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6^{n-1}}>0$，所以 $P_n<\frac{3}{7}<\frac{19}{42}$，

当 n 为偶数时，$P_n=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6^{n-1}}+\frac{3}{7}$，$P_n$ 随着 n 的增大而减小，则 $P_n\leqslant P_2=\frac{19}{42}$，

故 C 正确；

对于 D 选项，$P_n=(-\frac{1}{7})\cdot(-\frac{1}{6})^{n-1}+\frac{3}{7}$，因此，$P_4>\frac{3}{7}>P_3$，故 D 错误．

故选 ABC．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．设随机变量 $X\sim N(72,\sigma^2)$，若 $P(70<X<73)=0.3$，则 $P(71<X<74)=$_________．

【命题意图】本小题考查正态分布等基础知识；考查运算求解等能力；考查数形结合，化归与转化等思想；体现基础性，导向对数学运算等核心素养的关注．

【试题解析】由正态分布密度曲线的对称性可知，

$$P(70<X<73)=P(70<X\leqslant 72)+P(72<X<73)$$

$=P(72\leqslant X<74)+P(71<X<72)=P(71<X<74)\ =0.3$，

故答案为0.3．

14．已知$(x+m)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$，且$a_3+a_6=1$，则 $m=$_________．

【命题意图】本小题主要考查二项式定理等知识；考查运算求解等能力；考查函数与方程等思想；体现基础性，导向对数学运算等核心素养的关注．

【试题解析】由已知，得$a_3=C_6^3\cdot m^3=20m^3$，$a_6=C_6^0\cdot m^0=1$．

又$a_3+a_6=1$，所以$20m^3+1=1$，得$m=0$，

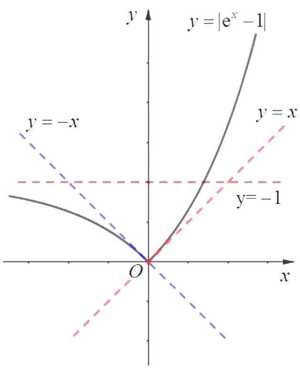
故答案为0．

15．已知函数$f(x)=|\mathrm{e}^x-1|-ax$有两个零点，则实数a的取值范围为_________．

【命题意图】本小题主要考查函数的基本性质，利用导数研究函数的性质等基础知识；考查运算求解，推理论证等能力；考查数形结合，化归与转化等思想；体现基础性，综合性，导向对直观想象，逻辑推理等核心素养的关注．

【试题解析】函数$f(x)=|\mathrm{e}^x-1|-ax$有两个零点，

等价于$y=|\mathrm{e}^x-1|$与$y=ax$的图象有两个不同的交点．



如图，两个临界情况对应的直线的斜率分别为$k_1=(\mathrm{e}^x-1)'|_{x=0}=1$，$k_2=(1-\mathrm{e}^x)'|_{x=0}=-1$．结合图象，$y=|\mathrm{e}^x-1|$与$y=ax$的图象要有两个不同的交点，则直线$y=ax$斜率$a\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$，

故答案为$(-1,0)\cup(1,+\infty)$．

16．已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，$C$的渐近线与圆$x^2+y^2=a^2$在第一象限的交点为$M$，线段$MF_2$与$C$交于点$N$，$O$为坐标原点．若

$MF_1 /\!/ ON$，则C的离心率为__________.

【命题意图】本小题主要考查双曲线的定义，直线与双曲线的位置关系等知识；考查运算求解，推理论证等能力，空间想象等能力及创新意识；考查数形结合，函数与方程等，函数与方程等思想；体现综合性与创新性，导向对直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养的关注.

【试题解析】

解法一： 依题意，可得$|OM|=a$，$|MF_2|=b$.

因为$MF_1 /\!/ ON$，$|OF_1|=|OF_2|$，所以$|MN|=|NF_2|=\dfrac{b}{2}$.

由双曲线的定义，得$|NF_1|=2a+|NF_2|$，即$|NF_1|=2a+\dfrac{b}{2}$.

在$\triangle NF_1F_2$中，由余弦定理，得$\cos\angle F_1F_2N=\dfrac{|F_1F_2|^2+|NF_2|^2-|NF_1|^2}{2|F_1F_2||NF_2|}$，即

$$\frac{b}{c}=\frac{(2c)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(2a+\frac{b}{2}\right)^2}{2\times 2c\times\frac{b}{2}},$$

化简得，$2b^2=4c^2-4a^2-2ab$，故$a=b$，所以离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$.

解法二： 依题意，设$F_2(c,0)$.

由已知，可得$M\left(\dfrac{a^2}{c},\dfrac{ab}{c}\right)$

因为$MF_1 /\!/ ON$，$|OF_1|=|OF_2|$，所以N为MF_2的中点.

所以$N\left(\dfrac{a^2+c^2}{2c},\dfrac{ab}{2c}\right)$，将点$N$的坐标代入$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，得$\dfrac{(a^2+c^2)^2}{4a^2c^2}-\dfrac{a^2b^2}{4c^2b^2}=1$，

$c^2=2a^2$，所以离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$，

故答案为$\sqrt{2}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜
自主选拔在线