2022年高考适应性练习（一）

数学参考答案

一、选择题

A B D C　C A C D

二、选择题

9. BCD　10. AC　11. ABD　12. CD

三、填空题

13. $-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　14. $\dfrac{3}{4}$　15. $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$　16. $168+96\sqrt{2}$

四、解答题

17. 解：（1）由 $4, a_n+1, S_n$ 成等比数列，得 $(a_n+1)^2=4S_n$，……1分

即 $a_n^2+2a_n+1=4S_n$，$n\in\mathbf{N}^*$．　①

当 $n=1$ 时，$(a_1+1)^2=4a_1$，解得 $a_1=1$．……2分

当 $n\geq 2$ 时，$a_{n-1}^2+2a_{n-1}+1=4S_{n-1}$．　②

①-②得，$a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}=4a_n$，整理得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$．

因为 $\{a_n\}$ 为正项数列，所以 $a_n+a_{n-1}>0$，所以 $a_n-a_{n-1}=2$，……4分

即数列 $\{a_n\}$ 是以1为首项、2为公差的等差数列.

所以 $a_n=2n-1$．……5分

（2）由（1）知，$S_n=n^2$．……6分

所以 $b_n=\dfrac{4S_n}{a_na_{n+1}}=\dfrac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)}=1+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$．……8分

所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$=n+\dfrac{1}{2}\times[(1-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7})+\cdots+(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})]$

$=n+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4n+2}$．……10分

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

18. 解：（1）因为 $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C=b+c$，

由正弦定理得，$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C$. ……………………2 分

因为 $B=\pi-(A+C)$，所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

代入上式得，$\sqrt{3}\sin A\sin C=\cos A\sin C+\sin C$. ……………………3 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq 0$，

所以上式可化为 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$， ……………………4 分

即 $\sin(A-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$. 因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A-\dfrac{\pi}{6}\in(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$，所以 $A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………6 分

（2）在 ΔABC 中，由余弦定理得：

$a^2=3^2+2^2-2\times3\times2\cos\dfrac{\pi}{3}=7$，即 $a=\sqrt{7}$. ……………………8 分

所以 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{7+4-9}{2\times\sqrt{7}\times2}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，所以 $\sin B=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$. ……………………9 分

因为角 A 的平分线交 BC 于 M，则 $\dfrac{BM}{MC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{2}{3}$，所以 $BM=\dfrac{2\sqrt{7}}{5}$. ……10 分

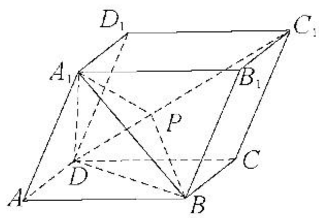
在 ΔABM 中，由正弦定理得 $\dfrac{BM}{\sin\angle BAM}=\dfrac{AM}{\sin B}$，即 $\dfrac{2\sqrt{7}}{5}\times2=\dfrac{14\cdot AM}{3\sqrt{21}}$，

所以 $AM=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$. ……………………12 分

19. 解：（1）证明：连结 BD.

因为 $A_1D\perp$ 面 $ABCD$，$AD\subset$ 面 $ABCD$，所以 $A_1D\perp AD$. ……………………1 分

又在 ΔADB 中，$AB=2$，$AD=1$，$\angle DAB=60^\circ$，由余弦定理得



$BD^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos60^\circ=3$，即 $BD=\sqrt{3}$，

由勾股定理得 $\angle ADB=90^\circ$，即 $AD\perp DB$. ……………3 分

因为 $A_1D\cap DB=D$，所以 $AD\perp$ 面 A_1BD. ……………4 分

又 $A_1B\subset$ 面 A_1BD， 所以 $AD\perp A_1B$. ……………………5 分

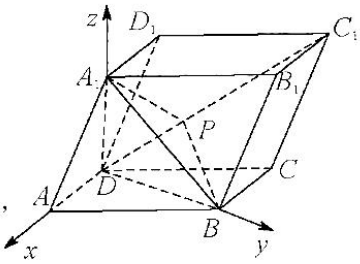
官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

（2）由（1）知，DA,DB,DA_1 两两垂直，以 D 为坐标原点，分别以向量 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA_1}$ 的方向为 x,y,z 轴正向，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$．…………………6 分

则 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$C_1(-2,\sqrt{3},\sqrt{3})$．

所以 $\overrightarrow{A_1B}=(0,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DC_1}=(-2,\sqrt{3},\sqrt{3})$，设 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC_1}\ (0<\lambda<1)$，

则 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC_1}=(-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，即 $P(-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}\lambda)$．…………………7 分



所以 $\overrightarrow{A_1P}=(-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3})$．

设 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 A_1PB 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1P}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}y_1-\sqrt{3}z_1=0\\ -2\lambda x_1+\sqrt{3}\lambda y_1+(\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3})z_1=0\end{cases}$，

令 $z_1=2\lambda$，则 $y_1=2\lambda$，$x_1=2\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}$，取 $\boldsymbol{n}=(2\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3},2\lambda,2\lambda)$．…………8 分

因为 $DB\perp$ 平面 AA_1D_1D，所以 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$ 为平面 AA_1D_1D 的一个法向量．………9 分

设面 A_1PB 与面 AA_1D_1D 的夹角为 α，

则 $\cos\alpha=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2\lambda}{\sqrt{20\lambda^2-12\lambda+3}}=\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{3}{\lambda^2}-\dfrac{12}{\lambda}+20}}$，$0<\lambda<1$．………… 10 分

此时当 $\dfrac{1}{\lambda}=2$，即 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，$\cos\alpha$ 取得最大值，…………………………………… 11 分

因此 $DP=\dfrac{1}{2}DC_1=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$．…………………………………………………… 12 分

20. 解：（1）事件 $A=$“甲平台日销售量不低于 8 件”，则

$P(A)=\dfrac{26+24+10}{100}=\dfrac{3}{5}$．…………………………………………………………1 分

设事件 $B=$“从甲平台所有销售数据中随机抽取 3 天的日销售量，其中至少有 2 天日销售量不低于 8 件”，则

$P(B)=C_3^2(\dfrac{3}{5})^2\dfrac{2}{5}+C_3^3(\dfrac{3}{5})^3$ ……………………………………………………3 分

$=\dfrac{81}{125}$．……………………………………………………………………4 分

（2）设甲平台日销售收入为 Y_1，

则 Y_1 所有可能的取值为 $6a-240,7a-270,8a-300,9a-330,10a-360$．………5 分

Y_1 的分布列为

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

Y_1	$6a-240$	$7a-270$	$8a-300$	$9a-330$	$10a-360$
P	$\frac{14}{100}$	$\frac{26}{100}$	$\frac{26}{100}$	$\frac{24}{100}$	$\frac{10}{100}$

因此$E(Y_1)=(6a-240)\times\frac{14}{100}+(7a-270)\times\frac{26}{100}+(8a-300)\times\frac{26}{100}$

$+(9a-330)\times\frac{24}{100}+(10a-360)\times\frac{10}{100}$ ……6 分

$=7.9a-297$ ……7 分

设乙平台日销售收入为Y_2，

则Y_2所有可能取值为$6a-240,7a-280,8a-320,9a-355,10a-390$. ……8 分

Y_2的分布列为

Y_2	$6a-240$	$7a-280$	$8a-320$	$9a-355$	$10a-390$
P	$\frac{10}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{35}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{10}{100}$

因此$E(Y_2)=(6a-240)\times\frac{10}{100}+(7a-280)\times\frac{25}{100}+(8a-320)\times\frac{35}{100}$

$+(9a-355)\times\frac{20}{100}+(10a-390)\times\frac{10}{100}$ ……9 分

$=7.95a-316$ ……10 分

于是$E(Y_2)-E(Y_1)=0.05a-19$. 令$0.05a-19\geq 0$，得$a\geq 380$. 所以当$300\leq a<380$时，选择甲平台；当$a=380$时，甲、乙平台均可；当$380<a\leq 500$时，选择乙平台. 12 分

21. 解：（1）因为双曲线的实轴长为2，所以$a=1$.

又因为点$(\sqrt{7},-1)$在C上，所以$7-\frac{1^2}{b^2}=1$，所以$b^2=\frac{1}{6}$.

所以双曲线C的方程为$x^2-6y^2=1$. ……2 分

因为抛物线的准线为$y=-1$，所以抛物线E的方程为$x^2=4y$. ……4 分

（2）设$P(x_0,y_0)$，直线PA方程为$y-y_0=k_1(x-x_0)$，

将其与抛物线方程$x^2=4y$联立，得$x^2-4k_1x-4(y_0-k_1x_0)=0$，

因为直线PA与抛物线相切，

所以$\Delta=16k_1^2+16(y_0-k_1x_0)=0$，整理得$k_1^2-k_1x_0+y_0=0$， ① ……5 分

点A的横坐标$x_A=2k_1$，$A(2k_1,k_1^2)$.

同理，直线PB方程为$y-y_0=k_2(x-x_0)$，有$k_2^2-k_2x_0+y_0=0$， ②

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

点 B 的横坐标 $x_B=2k_2$，$B(2k_2,k_2^2)$.

由①②知，k_1,k_2 是方程 $k^2-kx_0+y_0=0$ 的两个根，

所以 $k_1+k_2=x_0$，$k_1k_2=y_0$，……6 分

由 $A(2k_1,k_1^2)$，$B(2k_2,k_2^2)$，得 $k_{AB}=\dfrac{k_1^2-k_2^2}{2k_1-2k_2}=\dfrac{k_1+k_2}{2}$.

直线 AB 方程为 $y=\dfrac{k_1+k_2}{2}x-k_1k_2$，即 $y=\dfrac{x_0}{2}x-y_0$.……7 分

$|AB|=\sqrt{1+\dfrac{x_0^2}{4}}|2k_1-2k_2|=\sqrt{4+x_0^2}\cdot\sqrt{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}=\sqrt{4+x_0^2}\cdot\sqrt{x_0^2-4y_0}$ …8 分

点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{4+x_0^2}}$，

所以 $S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\sqrt{(x_0^2-4y_0)^3}$.……9 分

因为点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线上，所以 $x_0^2=6y_0^2+1$，

所以 $S_{\Delta APB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(6y_0^2-4y_0+1)^3}$，$y_0\in\mathbf{R}$.……10 分

当 $y_0=\dfrac{1}{3}$ 时，$S_{\Delta APB}$ 取得最小值 $\dfrac{\sqrt{3}}{18}$，故 ΔPAB 面积的取值范围为 $[\dfrac{\sqrt{3}}{18},+\infty)$.…… 12 分

22. 解：(1) $g(x)=f'(x)=2ae^{2x}-2x$，所以 $g'(x)=4ae^{2x}-2$.……2 分

当 $a\le 0$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单减，又当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，

当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，由零点存在定理，此时 $g(x)$ 存在唯一零点；……3 分

当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=4ae^{2x}-2>0$，得 $x>-\dfrac{\ln 2a}{2}$，故当 $x\in(-\dfrac{\ln 2a}{2},+\infty)$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单增. 同理，$x\in(-\infty,-\dfrac{\ln 2a}{2})$ 时，$g(x)$ 单减，所以 $g(x)_{\min}=g(-\dfrac{\ln 2a}{2})=1+\ln 2a$.……4 分

又当 $x\to-\infty$，$g(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$，$g(x)\to+\infty$，所以当 $g(-\dfrac{\ln 2a}{2})<0$，即 $0<a<\dfrac{1}{2e}$ 时，由零点存在定理 $g(x)$ 存在两个零点；当 $a=\dfrac{1}{2e}$ 时，$g(x)$ 存在一个零点；当 $a>\dfrac{1}{2e}$ 时，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无零点.……5 分

综上，当 $a\le 0$ 或 $a=\frac{1}{2\mathrm{e}}$ 时，$g(x)$ 存在 1 个零点；当 $0<a<\frac{1}{2\mathrm{e}}$ 时，$g(x)$ 存在 2 个零点；当 $a>\frac{1}{2\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 无零点. ……6 分

（2）由（1）知，$f(x)$ 的极值点为 x_1,x_2，即方程 $g(x)=2a\mathrm{e}^{2x}-2x=0$ 的两根，……7 分

且 $0<a<\frac{1}{2\mathrm{e}}$，所以 $a\mathrm{e}^{2x_1}=x_1>0$，$a\mathrm{e}^{2x_2}=x_2>0$.

两式相除并取对数得 $2(x_2-x_1)=\ln\frac{x_2}{x_1}>0$.

由 $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2}x_1+x_2\ge\lambda x_1x_2$，得 $2(x_2-x_1)(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2}x_1+x_2)\ge\lambda x_1x_2\ln\frac{x_2}{x_1}$， ……8 分

所以 $\lambda\le\dfrac{2(\frac{2}{\mathrm{e}-2}+\frac{x_2}{x_1}-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2}\frac{x_1}{x_2})}{\ln\frac{x_2}{x_1}}$. ……9 分

令 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$，令 $h(t)=\dfrac{2(\frac{2}{\mathrm{e}-2}+t-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2}\frac{1}{t})}{\ln t}$ $(t>1)$，则 $\lambda\le h(t)$ 恒成立.

$$h'(t)=2\frac{(t^2+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2})\ln t-(\frac{2}{\mathrm{e}-2}t+t^2-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2})}{t^2\ln^2 t},$$

令 $\varphi(t)=(t^2+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2})\ln t-(\frac{2}{\mathrm{e}-2}t+t^2-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2})$，则 $\varphi'(t)=2t\ln t-t+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2}\frac{1}{t}-\frac{2}{\mathrm{e}-2}$，

因为 $\varphi''(t)=2\ln t+1-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2}\frac{1}{t^2}$ 在 $(1,+\infty)$ 单增，且 $\varphi''(1)<0$，$\varphi''(\mathrm{e})>0$，所以 $\exists t_0\in(1,\mathrm{e})$，使得 $\varphi''(t_0)=0$，且当 $t\in(1,t_0)$ 时，$\varphi''(t)<0$，$\varphi'(t)$ 单减；$t\in(t_0,+\infty)$ 时，$\varphi''(t)>0$，$\varphi'(t)$ 单增. 又 $\varphi'(1)=0$，$\varphi'(\mathrm{e})>0$，由零点存在定理，存在 $t_1\in(1,\mathrm{e})$，当 $t\in(1,t_1)$ 时，$\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$ 单减，当 $t\in(t_1,+\infty)$ 时，$\varphi'(t)>0$，$\varphi(t)$ 单增. 又 $\varphi(1)=\varphi(\mathrm{e})=0$，所以当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时，$\varphi(t)<0$，$h(t)$ 单减，当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$\varphi(t)>0$，$h(t)$ 单增. ……11 分

所以当 $t=\mathrm{e}$ 时，$h(t)_{\min}=h(\mathrm{e})=\frac{2(\mathrm{e}-1)^2}{\mathrm{e}-2}$，$\lambda$ 的取值范围为 $\lambda\le\frac{2(\mathrm{e}-1)^2}{\mathrm{e}-2}$. …… 12 分

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线