



“皖东县中联盟”2022-2023 学年第一学期高三联考·数学试题

参考答案、提示及评分细则

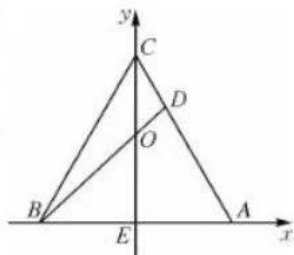
1. B 根据已知得 $zi = -2, z = \frac{-2}{i} = 2i, |z| = 2$. 故选 B.
2. C 由 $2 - \frac{1}{x} < x$, 解得 $x > 0$ 且 $x \neq 1$, 故集合 $M = \{x | x > 0 \text{ 且 } x \neq 1\}$, 由 $0 < 2^x - 1 \leq 1$, 解得 $0 < x \leq 1$, 所以 $N = \{x | 0 < x \leq 1\}$, 所以 $M \cap N = \{x | 0 < x < 1\}$. 故选 C. 来源: 高三答案公众号
3. C 由 $a \times a - 1 \times 1 = 0$, 得 $a^2 = 1, a = \pm 1$, 经验证只有当 $a = 1$ 时, $l_1 \parallel l_2$. 故选 C.
4. B 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的公差 $d = \frac{3-1}{2} = 1, \frac{1}{a_{19}} = 1 + (19-4) \times 1 = 16$, 解得 $a_{19} = \frac{1}{16}$. 故选 B.
5. A $f_n(x) = \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^{n-1}} = \frac{\sin 2x}{2^n \sin \frac{x}{2^{n-1}}}$, 所以 $f_5(\frac{8\pi}{3}) = \frac{\sin(2 \times \frac{8\pi}{3})}{2^5 \sin(\frac{1}{2^4} \times \frac{8\pi}{3})} = -\frac{\sqrt{3}}{32}$. 故选 A.
6. D 因为当 $x > 0$ 时, $f(x) = f(x-1) - f(x-2)$, 所以 $f(x+1) = f(x) - f(x-1), f(x+1) = -f(x-2)$, 即 $f(x+3) = f(x-1), f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$, 所以 $f(2024) = f(337 \times 6 + 2) = f(2) = -f(-1) = \frac{a}{2} - 1 = 1$, 所以 $a = 4$. 故选 D.
7. B 记事件 E: 该新品种“抗倒伏”性状, 事件 F: 该新品种“抗虫害”性状, 则 $P(E) = \frac{4}{15}, P(F) = \frac{2}{15}, P(E \cap F) = \frac{7}{10}$, 则 $P(E \cup F) = 1 - P(E \cap F) = \frac{3}{10}$. 又因为 $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$, 则 $P(EF) = P(E) + P(F) - P(E \cup F) = \frac{1}{10}$, 故所求概率为 $P(F|E) = \frac{P(EF)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{15}} = \frac{3}{8}$. 故选 B.
8. D 椭圆 E 的左、右顶点分别为 $(-2, 0), (2, 0)$, 则 $a^2 + 1 = 4, a^2 = 3$, 双曲线 C: $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1, F_1(-2, -1), F_2(2, 0)$, 椭圆 E 的上焦点 $P(0, \sqrt{5})$, 当直线 l 斜率不存在时, 直线方程为 $x = 2$, 则 $A(2, \frac{\sqrt{3}}{3}), B(2, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, AB 边上中垂线为 x 轴, 若 $\triangle ABP$ 外心 Q 落在 y 轴上, 则 $Q(0, 0)$, 但此时 $|QA|^2 = 4 + \frac{1}{3}, |QP|^2 = 5$, 由 $|QA| \neq |QP|$, 则不符合题意; 当直线 l 斜率存在时, 设 $l: y = k(x-2)$, 联立 $\begin{cases} y = k(x-2) \\ x^2 - 3y^2 = 3 \end{cases}$, 消去 y 可得 $(1-3k^2)x^2 + 12k^2x - 12k^2 - 3 = 0$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{12k^2}{3k^2-1}, x_1x_2 = \frac{12k^2+3}{3k^2-1}$, 因为 A, B 位于双曲线 C 的右支, 则 $k > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $k < -\frac{\sqrt{3}}{3}, y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2 - 4) = k \cdot \frac{12k^2 - 4(3k^2-1)}{3k^2-1} = \frac{4k}{3k^2-1}$, 设 AB 的中点 $M(\frac{6k^2}{3k^2-1}, \frac{2k}{3k^2-1}), Q(0, y_0)$, 则 Q 在 AB 的中垂线上, 所以 $\frac{y_0 - \frac{2k}{3k^2-1}}{0 - \frac{6k^2}{3k^2-1}} = -\frac{1}{k}$, 解得 $y_0 = \frac{8k}{3k^2-1}$, 所以 $Q(0, \frac{8k}{3k^2-1})$, 由 $|QP|^2 = |QA|^2 = |QM|^2 + \frac{1}{4}|AB|^2$, 可得 $5 + \frac{64k^2}{(3k^2-1)^2} - \frac{16\sqrt{5}k}{3k^2-1} = (\frac{6k^2}{3k^2-1})^2 + (\frac{2k-8k}{3k^2-1})^2 + \frac{1}{4} \cdot (k^2+1) \cdot [(\frac{12k^2}{3k^2-1})^2 - 4 \cdot \frac{12k^2+3}{3k^2-1}]$, 整理得 $2(3k^2-1)(k^2-8\sqrt{5}k-1) = 0$, 由 $3k^2-1 \neq 0$, 得 $k = 4\sqrt{5} + 9(4\sqrt{5}-9 \text{ 舍去})$, 直线方程为 $y = (4\sqrt{5}+9)(x-2)$. 故选 D.

【高三联考·数学试题参考答案 第 1 页(共 6 页)】



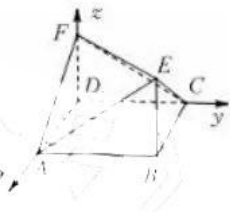
9. ACD 对于 A 选项, 因为 $x > -1$, 所以 $f(x) = \frac{x^2+2x+5}{x+1} = x+1 + \frac{4}{x+1} \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{4}{x+1}} = 4$, 当且仅当 $x+1 = \frac{4}{x+1}$ 即 $x=1$ 时取等号, 故 A 正确; 对于 B 选项, 设 $t = \sin x$, 则 $0 < t \leq 1$, 由于 $y = t + \frac{4}{t}$ 在 $(0, 1]$ 上为减函数, 所以当 $t=1$ 时, y 有最小值 5, 故 B 错误; 对于 C 选项, $\sqrt{x^2+1} \geq 1$, $f(x) = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}} = 4$, 当且仅当 $\sqrt{x^2+1} = \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$ 即 $x = \pm\sqrt{3}$ 时取等号, 故 C 正确; 对于 D 选项, $f(x) = 4^x + \frac{4}{4^x} \geq 2\sqrt{4^x \cdot \frac{4}{4^x}} = 4$, 当且仅当 $4^x = \frac{4}{4^x}$ 即 $x = \frac{1}{2}$ 时取等号, 故 D 正确. 故选 ACD.

10. BC 由题 E 为 AB 中点, 则 $CE \perp AB$, 以 E 为原点, EA, EC 分别为 x 轴, y 轴正方向建立平面直角坐标系, 如图所示: $E(0,0)$, $A(1,0)$, $B(-1,0)$, $C(0,\sqrt{3})$, $D(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$, 设 $O(0,y)$, $y \in (0, \sqrt{3})$, $\vec{BO} = (1,y)$, $\vec{DO} = (-\frac{1}{3}, y - \frac{2\sqrt{3}}{3})$, $\vec{BO} \parallel \vec{DO}$, 所以 $y - \frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{3}y$, 解得 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 O 是 CE 中点, $\vec{OE} + \vec{OC} = \vec{0}$, 所以选



项 B 正确; $|\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}| = |2\vec{OE} + \vec{OC}| = |\vec{OE}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以选项 C 正确; 因为 $\vec{BD} \cdot \vec{CE} = (\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}) \cdot (0, -\sqrt{3}) = -2$, 所以选项 A 错误; $\vec{ED} = (\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$, $\vec{BC} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{ED}$ 在 $\vec{BC}$ 方向上的投影向量为 $\frac{\vec{ED} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BC}|} \cdot \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} = \frac{5}{12} \vec{BC}$, 所以选项 D 错误. 故选 BC.

11. ABD 以 D 为坐标原点, 分别以 $\vec{DA}$, $\vec{DC}$, $\vec{DF}$ 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $A(6,0,0)$, $C(0,6,0)$, $E(6,3,6)$, $F(0,6,6)$, 则 $\vec{AE} = (0,3,6)$, $\vec{AF} = (-6,6,6)$, $\vec{CE} = (6,-3,6)$, $\vec{CF} = (0,0,6)$, 易求平面 AEF 的一个法向量 $\vec{m} = (-1,1,-1)$. 对于 A, 若 G 为线段 FC 的中点, 则 $G(0,3,3)$, 又 $B(6,6,0)$, 则 $\vec{GB} = (6,3,-3)$. 因为 $\vec{GB} \cdot \vec{m} = 0$, 又 $GB \not\subset$ 平面 AEF, 所以 $GB \parallel$ 平面 AEF, 故 A 正确; 对于 B, 多面体 ABCDFE 的体积等于一个棱长为 6 的正方体的体积减去两个三棱锥的体积, $V = 6^3 - 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times 6 = 144$, 故 B 正确; 对于 C, 设 $G(0,t,6-t)$ ($0 \leq t \leq 6$), 又 $B(6,6,0)$, $A(6,0,0)$, 所以 $\vec{AG} = (-6,t,6-t)$, $\vec{BG} = (-6,t-6,6-t)$, 所以 $AG^2 + BG^2 = 4t^2 - 36t + 180$, 故当 $t = \frac{9}{2}$ 时, $AG^2 + BG^2$ 取得最小值为 99, 故 C 错误; 对于 D, 因为 $\vec{EC} \cdot \vec{AF} = 0$, 所以 $EC \perp AF$, 故 D 正确. 故选 ABD.



12. BCD $\tan A + \tan B = \frac{\sqrt{3}c}{a \cos B} \cdot \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sqrt{3} \sin C}{\sin A \cos B}$, 即 $\frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B} = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{\sin C}{\cos A \cos B} = \frac{\sqrt{3} \sin C}{\sin A \cos B}$, 所以 $\tan A = \sqrt{3}$, 又 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$, 故 A 错误; 对于 B, 因为 $a^2 = 4 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc = (b+c)^2 - 3bc \geq (b+c)^2 - 3(\frac{b+c}{2})^2$, 所以 $(b+c)^2 \leq 16$, $b+c \leq 4$, 当且仅当 $b=c$ 时等号成立, 此时 $a+b+c \leq 6$, 所以周长的最大值为 6, 故 B 正确; 对于 C, 结合三角形面积公式得 $\frac{1}{2}ah_1 = 2$, $\frac{1}{2}bh_2 = 2$, $\frac{1}{2}ch_3 = 2$, 则 $h_1 = \frac{4}{a}$, $h_2 = \frac{4}{b}$, $h_3 = \frac{4}{c}$, $h_1h_2h_3 = \frac{64}{abc}$, 又因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}bc}{4} = 2$, 所以 $bc = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, 结合余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, 当且仅当 $b=c$ 时等号成立, 所以

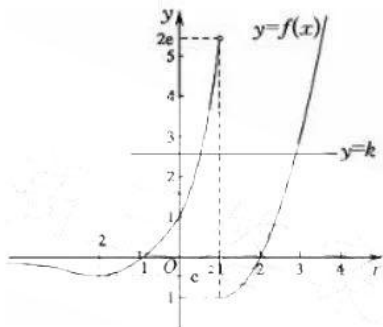


$h_1 h_2 h_3 = \frac{64}{abc} = \frac{8\sqrt{3}}{a}$, 所以 $t^2 = \frac{192}{a^2} \leq 24\sqrt{3}$, 所以 t^2 的最大值为 $24\sqrt{3}$, 故 C 正确; 对于 D, 由题 $\overrightarrow{AD} = \frac{2b}{c+2b}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{c+2b}\overrightarrow{AC}$, 两边平方并化简得 $|\overrightarrow{AD}|^2 = 1 = \frac{4b^2 c^2}{(c+2b)^2} + \frac{c^2 b^2}{(c+2b)^2} + \frac{4b^2 c^2}{(c+2b)^2} \times \frac{1}{2}$, 即 $(c+2b)^2 = 7b^2 c^2$, $c+2b = \sqrt{7}bc$, $\frac{1}{b} + \frac{2}{c} = \sqrt{7}$, 所以 $b+2c = \frac{1}{\sqrt{7}}(b+2c)\left(\frac{1}{b} + \frac{2}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{7}}\left(5 + \frac{2c}{b} + \frac{2b}{c}\right) \geq \frac{9\sqrt{7}}{7}$, 当且仅当 $b=c$ 时取等号, 所以 $b+2c$ 的最小值为 $\frac{9\sqrt{7}}{7}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

13. 10 $f(2) = -f(-2) = -[-2 \times (3+2)] = 10$, 又 $f(0) = 0$, 所以 $f(2) + f(0) = 10$.

14. 2π 因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球球心 O 到侧面 BCC_1B_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以以 O 为球心, 半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的球的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线为半径为 1 的圆, 所以其交线长度为 2π .

15. $[-1, +\infty)$ (2 分) $\{-e^{-2}\} \cup [0, 2e)$ (3 分) 当 $x < 1$ 时, $f'(x) = (x+2)e^x$, 所以 $f(x) = (x+1)e^x$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在 $[-2, 1)$ 上单调递增, 所以当 $x < 1$ 时, $f(x) = (x+1)e^x \in [-e^{-2}, 2e)$, 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \in [-1, +\infty)$, 综上, 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1, +\infty)$, 作出函数 $f(x)$ 的大致图象与直线 $y=k$ 如图所示:



函数 $g(x) = f(x) - k$ 有 2 个零点, 即 $y = f(x)$ 与 $y = k$ 有 2 个交点, 所以 $k > -e^{-2}$ 或 $k < 2e$.

16. 0 由抛物线方程知 $F(\frac{p}{2}, 0)$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, 则 $|AF| + |BF| + |CF| = x_1 + x_2 + x_3 + \frac{p}{2} + \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = (x_1 + x_2 + x_3) + \frac{3p}{2}$, 因为 F 为 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{p}{2}$, 则 $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3p}{2}$, 所以 $|AF| + |BF| + |CF| = 3p = 6$, $p = 2$, 所以抛物线方程为 $y^2 = 4x$, 当直线 l 斜率不存在时, 直线 $l: x = 4$, 不妨取 $M(4, 4)$, $N(4, -4)$, 此时为 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 4 \times 4 - 4 \times 4 = 0$; 当直线 l 斜率存在时, 设直线 $l: y = k(x-4)$ ($k \neq 0$), $M(x_4, y_4)$, $N(x_5, y_5)$, 联立 $\begin{cases} y = k(x-4) \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 消去 y 得 $k^2 x^2 - (8k^2 + 4)x + 16k^2 = 0$, 所以 $x_4 + x_5 = \frac{8k^2 + 4}{k^2}$, $x_4 x_5 = 16$, 所以 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = x_4 x_5 + y_4 y_5 = x_4 x_5 + k(x_4 - 4) \cdot k(x_5 - 4) = (1 + k^2)x_4 x_5 - 4k^2(x_4 + x_5) + 16k^2 = 16(1 + k^2) - 4k^2 \cdot \frac{8k^2 + 4}{k^2} + 16k^2 = 0$, 综上 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$.

17. 解: (1) $f(x) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + a = 2\cos^2 \omega x + 2\sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x + a = 1 + \cos 2\omega x + \sqrt{3} \sin 2\omega x + a$
 $= 2\sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + a + 1, \dots\dots\dots 2$ 分
 所以 $f(x)$ 的最大值为 $2 + a + 1 = 1$, 所以 $a = -2, \dots\dots\dots 3$ 分
 又因为该函数图象相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, $\dots\dots\dots$



所以该函数的最小正周期为 π , 所以 $\frac{2\pi}{2\omega} = \pi, \omega = 1$, 4 分

所以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$ 5 分

(2) 由题意得 $g(x) = 2\sin\left[4\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6}\right] - 1 = 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$, 7 分

因为 $0 \leq x \leq t, -\frac{\pi}{6} \leq 4x - \frac{\pi}{6} \leq 4t - \frac{\pi}{6}$, 8 分

所以 $4t - \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$, 又 $t > 0$, 所以 $0 < t \leq \frac{\pi}{3}$, 则实数 t 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$ 10 分

18. (1) 解: 选①: 因为 $a_{n+1} = S_n + 1$, 所以 $S_{n+1} - S_n = S_n + 1, 1 + S_{n+1} = 2(1 + S_n)$,

所以数列 $\{1 + S_n\}$ 是首项为 $1 + S_1 = a_1 + 1 = 2$, 公比为 2 的等比数列, 2 分

所以 $1 + S_n = 2^n, S_n = 2^n - 1$, 3 分

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 2 - 1 = 1$; 4 分

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n - 1 - (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}$,

$a_1 = 1$ 也符合上式, 所以 $a_n = 2^{n-1}$, 5 分

所以 $b_n = \frac{1}{1 + \log_2 2^{n-1}} = \frac{1}{n}$, 6 分

选②: 根据已知得 $a_{n+1}^2 + 2a_n a_{n+1} - 8a_n^2 = 0, a_n > 0$, 两边同时除以 a_n^2 , 得 $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 + 2 \times \frac{a_{n+1}}{a_n} - 8 = 0$,

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ 或 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -4$ (舍). 又 $a_1 = 1$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 1$, 公比 $q = 2$ 的等比数列, 4 分

故 $a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$, 所以 $b_n = \frac{1}{1 + \log_2 2^{n-1}} = \frac{1}{n}$, 6 分

(2) 证明: 因为当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$,

所以 $c_n = \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} - \frac{1}{n^2} \geq \sqrt{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}} - \frac{1}{n^2} = 1$, 7 分

所以 $T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n \geq 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n$, 8 分

当 $n = 1, T_1 = c_1 = 1 < 1 + \frac{1}{2}$, 9 分

当 $n \geq 2$ 时, 因为 $c_n = \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} - \frac{1}{n^2} = \sqrt{1 \cdot \left(1 + \frac{3}{n^2}\right)} - \frac{1}{n^2} < \frac{1 + 1 + \frac{3}{n^2}}{2} - \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n-1)n}$,
 $\frac{1}{(n-1)n} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$, 10 分

所以 $T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = n + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = n + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < n + \frac{1}{2}$,

所以对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n < n + \frac{1}{2}$.

综上, 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq T_n < n + \frac{1}{2}$ 12 分

19. 解: (1) 依题意, 得 $\bar{x} = (55 \times 0.011 + 65 \times 0.02 + 75 \times 0.034 + 85 \times 0.028 + 95 \times 0.007) \times 10 = 75$,

估计抽取的 200 份问卷的数据平均值 $\bar{x} = 75$, 3 分

(2) 由于第五组总抽取 7 份问卷, 县城高中占 $\frac{3}{7}$,

所以抽到的县城高中问卷有 $7 \times \frac{3}{7} = 3$ 份, 非县城高中问卷共 4 份, 4 分

再从中抽 3 份问卷中包含县城高中问卷数为 X , 则 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 5 分

$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}; P(X=1) = \frac{C_3^1 C_4^2}{C_7^3} = \frac{18}{35}; P(X=2) = \frac{C_3^2 C_4^1}{C_7^3} = \frac{12}{35}; P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}$, 7 分

5 分

故其分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

所以得到随机变量 X 的数学期望 $E(X) = 0 \times \frac{4}{35} + 1 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} = \frac{9}{7}$ 8 分

(3) 因为 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} (x_i - \bar{x})^2} = 2\sqrt{30} \approx 10.954 \approx 11$, 所以 $\xi \sim N(75, 11)$.

$P(64 < \xi \leq 97) = P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + 2\sigma) = \frac{1}{2} P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + \sigma) + \frac{1}{2} P(\mu - 2\sigma < \xi \leq \mu + 2\sigma) \approx \frac{1}{2} \times (0.6827 + 0.9545) = 0.8186$ 10 分
则 $65 \times 0.8186 \approx 53$.

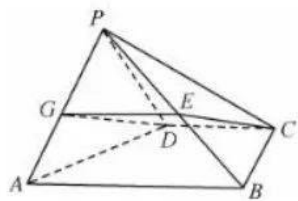
所以估计该市中学学校体育教学综合质量指标在 $(64, 97]$ 内的学校数量约为 53 所. 12 分
20. 解: (1) 取 PA 的中点 G , 连接 DG, EG , 如图所示:

则 $GE \parallel AB$, 且 $AB \parallel CD, GE = \frac{1}{2} AB = DC$,

所以四边形 $CDGE$ 为平行四边形. 2 分

在 $Rt\triangle DPG$ 中, $DG = \sqrt{1 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, CE = DG = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

所以 CE 的长为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 4 分



(2) 在平面 $ABCD$ 内过点 A 作 BC 的平行线, 交 CD 的延长线于点 M , 如图所示,

以点 M 为坐标原点, 分别以 MA, MC 为 x 轴和 y 轴, 以与平面 $MABC$ 垂直的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系 $M-xyz$, 取 AD 的中点为 N , 连接 PN, MN , 在平面 PMN 中过点 P 作 $PF \perp MN$, 垂足为 F , 则 $\angle PNM = \theta$, 则 $A(1, 0, 0), D(0, 1, 0), C(0, 2, 0)$, 设 $P(x_0, y_0, z_0)$ 5 分

因为 $PN = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $PF = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta, FN = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta, MF = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \cos \theta)$.

所以 $x_0 = y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \cos \theta) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta), z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta$.

所以 $P(\frac{1}{2} (1 - \cos \theta), \frac{1}{2} (1 - \cos \theta), \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta)$,

所以 $\vec{AD} = (-1, 1, 0), \vec{PA} = (\frac{1 + \cos \theta}{2}, \frac{\cos \theta - 1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta)$ 6 分

设平面 PAD 的法向量 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\begin{cases} -x_1 + y_1 = 0, \\ \frac{1 + \cos \theta}{2} x_1 + \frac{\cos \theta - 1}{2} y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} z_1 \sin \theta = 0, \end{cases}$$

令 $z_1 = \sqrt{2}$, 则 $\vec{n}_1 = (\tan \theta, \tan \theta, \sqrt{2})$ 7 分

设平面 PBC 的法向量 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

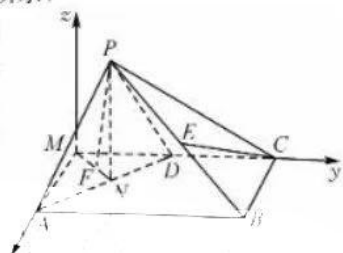
因为 $\vec{CB} = (1, 0, 0), \vec{PC} = (\frac{\cos \theta - 1}{2}, \frac{\cos \theta + 3}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta)$,

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ \frac{\cos \theta - 1}{2} x_2 + \frac{\cos \theta + 3}{2} y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} z_2 \sin \theta = 0, \end{cases}$$

令 $y_2 = \sqrt{2} \sin \theta$, 可得 $\vec{n}_2 = (0, \sqrt{2} \sin \theta, 3 + \cos \theta)$ 8 分

设平面 PAD 和平面 PBC 的夹角为 α ,

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|\frac{\sqrt{2} \sin^2 \theta}{\cos \theta} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2} \cos \theta|}{\sqrt{(2 \tan^2 \theta + 2)(\sin^2 \theta + 6 \cos \theta + 10)}} = \frac{|3 \cos \theta + 1|}{\sqrt{11 - \cos^2 \theta + 6 \cos \theta}}$$





$$= \frac{3 \left| \cos \theta + \frac{1}{3} \right|}{\sqrt{-\left(\cos \theta + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{20}{3}\left(\cos \theta + \frac{1}{3}\right) + \frac{80}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{9\left(\cos \theta + \frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\cos \theta + \frac{1}{3}\right) - 1}}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

令 $t = \frac{1}{\cos \theta + \frac{1}{3}}, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $t \in (\frac{3}{4}, 3]$, 微信搜《高三答案公众号》

所以 $\cos \alpha = \frac{9}{\sqrt{80t^2 + 60t - 9}}$, 所以当 $t = 3$ 时, $\cos \alpha$ 有最小值 $\frac{\sqrt{11}}{11}$,

所以平面 PAD 和平面 PBC 夹角余弦值的最小值为 $\frac{\sqrt{11}}{11}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

21. 解: (1) 设椭圆 C 的半焦距为 c ,

$$\text{则} \begin{cases} b = \sqrt{3}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \text{解得 } a = 2, c = 1, \\ e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}. \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

(2) 将直线 l 的方程与椭圆方程联立消去 y 并整理得 $(3+4k^2)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 12 = 0$, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

所以 $\Delta = 64k^2t^2 - 4(3+4k^2)(4t^2 - 12) = 16(9 + 12k^2 - 3t^2)$, $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

因为直线 l 与椭圆 C 相切, 即 $\Delta = 0$, 所以 $t^2 = 3 + 4k^2$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

因为 $F_1(-1, 0)$ 到直线 l 的距离为 $d_1 = \frac{|k-t|}{\sqrt{1+k^2}}$, $F_2(1, 0)$ 到直线 l 的距离为 $d_2 = \frac{|k+t|}{\sqrt{1+k^2}}$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

所以 $d_1 + d_2 = \frac{|k-t|}{\sqrt{1+k^2}} + \frac{|k+t|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{|k-t| + |k+t|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{|t^2 - (3+4k^2)|}{1+k^2} = \frac{|3+3k^2|}{1+k^2} = 3$, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

结合基本不等式得 $d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{d_1 \cdot d_2} = 2\sqrt{3}$, 当且仅当 $d_1 = d_2 = \sqrt{3}$ 时取等号,

所以 $d_1 + d_2$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 解: (1) $x \in \mathbf{R}$, 而 $f'(x) = e^x + \cos x - m$.

根据导数的几何意义得 $f'(0) = e^0 + \cos 0 - m = 2 - m = 0$, 解得 $m = 2$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

所以 $f(x) = e^x + \sin x - 2x$, 所以 $f'(x) = e^x - 2 + \cos x$.

当 $x \leq 0$ 时, $e^x \leq 1$, 又 $\cos x \leq 1$, 则 $e^x + \cos x \leq 2$,

故 $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 单调递减.

设 $h(x) = f'(x) (x > 0)$, 则 $h'(x) = e^x - \sin x$,

当 $x > 0$ 时, $e^x > 1 \geq \sin x$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 是增函数, 即 $f'(x)$ 是增函数,

所以 $f'(x) > f'(0) = 0$, 因此 $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 的增区间是 $(0, +\infty)$, 减区间是 $(-\infty, 0)$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 因为 $x \geq 0$, 设 $g(x) = e^x - 2x + \sin x - ax^2 - 1$, 即 $g(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, $g(0) = 0$ 满足题意.

$g'(x) = e^x - 2 + \cos x - 2ax$, 令 $q(x) = g'(x) = e^x - 2 + \cos x - 2ax$, $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

则 $q'(x) = e^x - \sin x - 2a$, 令 $s(x) = q'(x) = e^x - \sin x - 2a$,

则 $s'(x) = e^x - \cos x \geq 1 - \cos x \geq 0$, 所以 $s(x)$ 即 $q'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$q'(x) \geq q'(0) = 1 - 2a$, 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $q'(x) \geq q'(0) = 1 - 2a \geq 0$,

函数 $q(x)$ 即 $g'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

所以 $g'(x) \geq g'(0) = 0$, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x) \geq g(0) = 0$ 恒成立, 原不等式恒成立; $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 则 $q'(0) = 1 - 2a < 0$, 又 $q'(\ln(2a+2)) = 2 - \sin(\ln(2a+2)) > 0$,

所以存在 $x_0 \in (0, \ln(2a+2))$, 使得 $q'(x_0) = 0$, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$0 < x < x_0$ 时, $q'(x) < 0$, $q(x)$ 即 $g'(x)$ 单调递减, $x > x_0$ 时, $q'(x) > 0$, $q(x)$ 即 $g'(x)$ 单调递增,

又 $g'(0) = 0$, 所以 $0 < x < x_0$ 时, $g'(x_0) < 0$, 从而 $g(x)$ 单调递减, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

于是 $g(x) < g(0) = 0$ 不合题意.

综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{2}]$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线