2023年浙江省高考数学模拟卷

答案

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8
A	D	C	C	B	B	D	B

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9	10	11	12
AC	ABC	BC	BD

三、填空题：本题共4小题，每题5分，共20分．

13．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　14．$\dfrac{5\pi}{12}$　　15．$\dfrac{e^2}{2}$　　16. 20

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【答案】

(1) $A=\dfrac{2\pi}{3}$　(2) $\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$

【解析】(1) 由 $a\cos C-\dfrac{1}{2}c=b$ 结合正弦定理可得 $\sin A\cos C-\dfrac{1}{2}\sin C=\sin B$，

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$,

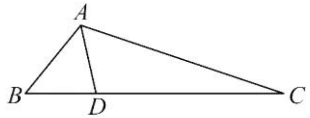
所以 $\sin A\cos C-\dfrac{1}{2}\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，即 $-\dfrac{1}{2}\sin C=\cos A\sin C$

因为 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos A=-\dfrac{1}{2}$，因为 $A\in(0，\pi)$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$；

（2）由题设，令 $\angle B=\angle BAD=\theta\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，则 $\angle DAC=\dfrac{2\pi}{3}-\theta$，$\angle C=\dfrac{\pi}{3}-\theta$，$\angle ADC=2\theta$，

在△ ADC 中 $\dfrac{AD}{\sin C}=\dfrac{CD}{\sin\angle DAC}$，

即 $\dfrac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}=\dfrac{3}{\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}$，



所以 $\sin(\dfrac{2\pi}{3}-\theta)=3\sin(\dfrac{\pi}{3}-\theta)$，故 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\dfrac{3}{2}\sin\theta$，

所以 $2\sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta$，即 $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，

所以 $\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{7}, \cos\theta = \frac{2\sqrt{7}}{7}$. $AB = 2BD\cos\theta = \frac{4\sqrt{7}}{7}$

18、【答案】

(1) $a_n = 2n+2\left(n \in \mathrm{N}^*\right)$

(2)能，$k_n = 2^n - 1\left(n \in \mathrm{N}^*\right)$，$T_n = 2^{n+1} - n - 2$.

【解析】（1）$a_n + 1 = \sqrt{4S_n + 9}$，$4S_n = a_n^2 + 2a_n - 8$

当 $n = 1$ 时，$4S_1 = a_1^2 + 2a_1 - 8 = 4a_1$，即 $a_1^2 - 2a_1 - 8 = 0\left(a_1 > 0\right)$，

得 $a_1 = 4$ 或 $a_1 = -2$（舍去）.

当 $n \geq 2$ 时，由 $4S_n = a_n^2 + 2a_n - 8$，……①

得 $4S_{n-1} = a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} - 8\left(n \geq 2\right)$，……②

① − ② 得：$4a_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 + 2a_n - 2a_{n-1}$，

化简得 $\left(a_n - a_{n-1} - 2\right)\left(a_n + a_{n-1}\right) = 0$.

因为 $a_n > 0$，所以 $a_n - a_{n-1} - 2 = 0$，$a_n = a_{n-1} + 2\left(n \geq 2\right)$，

即数列 $\left\{a_n\right\}$ 是以 4 为首项，2 为公差的等差数列，

所以 $a_n = 2n + 2\left(n \in \mathrm{N}^*\right)$.

（2）存在.

当 $a_{k_1} = a_1 = 4$，$a_{k_2} = a_3 = 8$ 时，

会得到数列 $\left\{a_n\right\}$ 中原次序的一列等比数列 $a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_m}, \cdots, \left(k_1 = 1\right)$，

此时的公比 $q = 2$，是最小的，此时该等比数列的项均为偶数，均在数列 $\left\{a_n\right\}$ 中；

下面证明此时的公比最小：

$a_{k_1} = a_1 = 4$，假若 a_{k_2} 取 $a_2 = 6$，公比为 $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$，

则 $a_{k_3} = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9$ 为奇数，不可能在数列 $\left\{a_n\right\}$ 中.

所以 $a_{k_m}=4\cdot 2^{m-1}=2^{m+1}$.

又 $a_{k_m}=2k_m+2=2^{m+1}$，所以 $k_m=2^m-1$，即 $\{k_n\}$ 的通项公式为：$k_n=2^n-1\left(n\in N^*\right)$，

故 $T_n=2^1-1+2^2-1+\cdots\cdots+2^n-1=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$.

19、【解析】

（1）连结 AO 并延长 AO 交 BC 于 M，连结 OB, OC，

因为 O 恰好为 $\triangle ABC$ 的外心，所以 $OB=OC$，

又 $AC=AB$，$AO=OA$，所以 $\triangle AOC\cong\triangle AOB$，

所以 $\angle CAO=\angle BAO$，即 AM 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

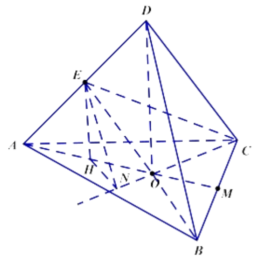
又 $AC=AB$，所以由等腰三角形三线合一可得 $AM\perp BC$，

因为 D 在面 ABC 上的投影为 O，所以 $OD\perp$ 面 ABC，

又 $BC\subset$ 面 ABC，所以 $OD\perp BC$，

又 $AM\cap OD=O, AM, OD\subset$ 面 AMD，所以 $BC\perp$ 面 AMD，

又 $AD\subset$ 面 AMD，所以 $BC\perp AD$.



（2）解法一：在 $\triangle ABC$ 中，由（1）与等腰三角形三线合一可知 M 是 BC 的中点，

由（1）知 $AM\perp BC$，$OD\perp$ 面 ABC，

取 AO 中点 H，连结 EH，因为 $OD=2$，$EH=1, EH\perp$ 面 ABC.

作 HN 垂直 CO 交于点 N，连结 EN，$\angle ENH$ 即为平面 ECO 与平面 ACO 夹角的平面角.

易得 $\Delta HNO\sim\Delta CMO$，$\dfrac{HN}{CM}=\dfrac{HO}{OC}=\dfrac{HO}{OA}=\dfrac{1}{2}, HN=\dfrac{1}{2}$，

$\tan\angle ENH=\dfrac{EH}{HN}=2, \cos\angle ENH=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，即平面 ECO 与平面 ACO 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

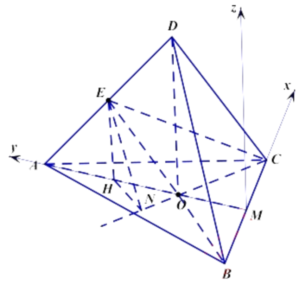
解法二：由（1）知 $AM\perp BC$，$OD\perp$ 面 ABC，过 M 作 z 轴平行于 OD，则 z 轴垂直于面 ABC，

如图建立空间直角坐标系，在 $\triangle ABC$ 中，由（1）与等腰三角形三线合一可知 M 是 BC 的中点，又 $AC=AB=4$，$BC=2$，则 $AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{15}$，

设 $AO=r$，则 $BO=r$，又 $OM^2+BM^2=OB^2$，所以 $\left(\sqrt{15}-r\right)^2+1^2=r^2$，解得 $r=\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$，故 $OM=AM-AO=\dfrac{7\sqrt{15}}{15}$，

则 $C(1,0,0), O\left(0,\dfrac{7\sqrt{15}}{15},0\right), A\left(0,\sqrt{15},0\right), D\left(0,\dfrac{7\sqrt{15}}{15},2\right), E\left(0,\dfrac{11\sqrt{15}}{15},1\right)$，

故$\overrightarrow{OE}=\left(0,\frac{4\sqrt{15}}{15},1\right),\overrightarrow{OC}=\left(1,-\frac{7\sqrt{15}}{15},0\right)$，



设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面ECO的一个法向量，则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{OE}=\frac{4\sqrt{15}}{15}y+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OC}=x-\frac{7\sqrt{15}}{15}y=0\end{cases},$$

取$y=1$，则$y=\frac{7\sqrt{15}}{15},z=-\frac{4\sqrt{15}}{15}$，故$\vec{n}=\left(\frac{7\sqrt{15}}{15},1,-\frac{4\sqrt{15}}{15}\right)$，

易得$\vec{m}=(0,0,1)$是平面COB的一个法向量，设平面ECO与平面ACO夹角的平面角为θ，

$$\cos\theta=\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{\frac{4\sqrt{15}}{15}}{\sqrt{\frac{49}{15}+1+\frac{16}{15}}}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

所以平面ECO与平面ACO夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

20. 【解析】

（1）$n=3$时，

$P(X_3=-3)=(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$，$P(X_3=-1)=C_3^1(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^1=\frac{2}{9}$

$P(X_3=1)=C_3^2(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$，$P(X_3=3)=C_3^3(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$.

x_3	-3	-1	1	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$E(X_3)=1$.

（1）$n=4$时，

$P(X_4=-4)=(\frac{1}{3})^4=\frac{1}{81}$，$P(X_4=-2)=C_4^1(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^1=\frac{8}{81}$

$P(X_4=0)=C_4^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2=\frac{8}{27}$，$P(X_4=2)=C_4^3(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^3=\frac{32}{81}$，

$P(X_4=4)=(\frac{2}{3})^4=\frac{16}{81}$.

x_4	-4	-2	0	2	4
P	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

$E(X_4)=\frac{4}{3}$

（2）设点Q向右移动m次，向左移动$10-m$次的概率为P_m，则$P_m=C_{10}^m(\frac{1}{3})^{10-m}(\frac{2}{3})^m$，

$$\frac{P_m}{P_{m-1}}=\frac{C_{10}^m(\frac{1}{3})^{10-m}(\frac{2}{3})^m}{C_{10}^{m-1}(\frac{1}{3})^{11-m}(\frac{2}{3})^{m-1}}=\frac{2C_{10}^m}{C_{10}^{m-1}}=\frac{2(11-m)}{m}=\frac{22}{m}-2$$

当$m\le 7$时，$P_m>P_{m-1}$，P_m随m的值的增加而增加，

当$m>7$时，$P_m<P_{m-1}$，P_m随m的值的增加而减小，

所以当$m=7$时，P_m最大，此时点Q所在的位置对应的实数应为 4.

21. 【解析】

（1）设 $P(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则 $l_{PM}:\dfrac{x_1x}{16}+\dfrac{y_1y}{4}=1$，$l_{PN}:\dfrac{x_2x}{16}+\dfrac{y_2y}{4}=1$，又因为 P 是两条切线的交点，

所以有 $l_{PM}:\dfrac{x_1x_0}{16}+\dfrac{y_1y_0}{4}=1$，$l_{PN}:\dfrac{x_2x_0}{16}+\dfrac{y_2y_0}{4}=1$，

所以 $l_{MN}:\dfrac{x_0x}{16}+\dfrac{y_0y}{4}=1$，$k_{MN}=-\dfrac{x_0}{4y_0}$，又因为 $k_{OP}=\dfrac{y_0}{x_0}$，所以 $k_{MN}\cdot k_{OP}=-\dfrac{x_0}{4y_0}\cdot\dfrac{y_0}{x_0}=-\dfrac{1}{4}$.

（2）①当 $x_0,y_0\neq 0$ 时，联立直线 MN 与椭圆方程 $\begin{cases}y=-\dfrac{x_0}{4y_0}x+\dfrac{4}{y_0}\\x^2+4y^2-16=0\end{cases}$，

得 $(x_0^2+4y_0^2)x^2-32x_0x+256-64y_0^2=0$，

$\Delta=256(4y_0^4-16y_0^2+x_0^2y_0^2)$，则 $|MN|=\dfrac{\sqrt{256(4y_0^4-16y_0^2+x_0^2y_0^2)}}{x_0^2+4y_0^2}\cdot\sqrt{1+(\dfrac{-x_0}{4y_0})^2}$，

联立直线 OP 与椭圆方程 $\begin{cases}y=\dfrac{y_0}{x_0}x\\x^2+4y^2-16=0\end{cases}$，解得点 $A(\dfrac{-4x_0}{\sqrt{x_0^2+4y_0^2}},\dfrac{-4y_0}{\sqrt{x_0^2+4y_0^2}})$.

则点 A 到直线 MN 的距离 $d=\dfrac{|4x_0^2+16y_0^2+16\sqrt{x_0^2+4y_0^2}|}{\sqrt{x_0^2+4y_0^2}\sqrt{x_0^2+16y_0^2}}$，

所以

$$S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{256(4y_0^4-16y_0^2+x_0^2y_0^2)}}{x_0^2+4y_0^2}\sqrt{\frac{x_0^2+16y_0^2}{16y_0^2}}\cdot\frac{|4x_0^2+16y_0^2+16\sqrt{x_0^2+4y_0^2}|}{\sqrt{x_0^2+4y_0^2}\sqrt{x_0^2+16y_0^2}}$$

$$=\frac{8\sqrt{x_0^2+4y_0^2-16}\cdot(\sqrt{x_0^2+4y_0^2}+4)}{x_0^2+4y_0^2}$$

令 $t=\sqrt{x_0^2+4y_0^2}$，则 $S_{\Delta AMN}=\dfrac{8(t+4)\sqrt{t^2-16}}{t^2}=8\sqrt{(1+\dfrac{4}{t})^3(1-\dfrac{4}{t})}$，

令 $1+\dfrac{4}{t}=m$，则 $f(m)=m^3(2-m)=-m^4+2m^3$，

$f'(m)=-4m^3+6m^2=-2m^2(2m-3)$，$f(m)$ 在 $(1,\dfrac{3}{2})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{3}{2},+\infty)$ 上单调递减，当 $m=\dfrac{3}{2}$，$t=8$，即 $x_0^2+4y_0^2=64(x_0,y_0\neq 0)$ 时，$f(m)_{\min}=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{27}{16}$.

所以 $S_{\Delta AMN}\leq 8\sqrt{\dfrac{27}{16}}=6\sqrt{3}$，所以 ΔAMN 面积的最大值是 $6\sqrt{3}$.

②当 $x_0=0$ 时，可求得，当 $y_0=\pm 4$ 时，$S_{\Delta AMN}$ 的最大值为 $6\sqrt{3}$.

当 $y_0=0$ 时，可求得，当 $x_0=\pm 8$ 时，$S_{\Delta AMN}$ 的最大值为 $6\sqrt{3}$.

综上，当 $x_0^2+4y_0^2=64$ 时，ΔAMN 面积的最大值是 $6\sqrt{3}$.

22. 【解析】

（1）$e^x-ax=\ln(ax)-x$，$e^x+x=\ln(ax)+ax$，$e^x+x=e^{\ln ax}+\ln(ax)$，

$m(x)=e^x+x$ 单调递增，则 $m(x)=m(\ln(ax))$，则 $x=\ln(ax)$，即 $e^x=ax$，

所以方程 $e^x-ax=\ln(ax)-x$ 的根即方程 $e^x=ax$ 的根. 令 $h(x)=\dfrac{e^x}{x}$，则 $h'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$，

$h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，且 $h(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

因为方程 $e^x=ax$ 有两个实根，所以 $h(x)_{\min}=h(1)=e$，$a>e$.

（2）要证 $x_1<x_3$，即证 $e^{x_1}<e^{x_3}$，由（1）可得 $ax_1=e^{x_1}$，

（3）只需证明 $\ln(1+x_3)-\cos x_3+2=e^{x_1}<e^{x_3}$，

下面证明 $e^x>\ln(1+x)-\cos x+2\ (x>0)$

令 $\varphi(x)=x-\sin x$，$\varphi'(x)=1-\cos x\ge 0$，所以 $y=\varphi(x)$ 在 R 上单调递增，

又因为 $\varphi(0)=0$，则当 $x>0$ 时，$x>\sin x$.

设 $k(x)=e^x-\ln(1+x)+\cos x$，则 $k'(x)=e^x-\dfrac{1}{1+x}-\sin x$，

当 $x>0$ 时，$k'(x)=e^x-\dfrac{1}{1+x}-\sin x>e^x-\dfrac{1}{1+x}-x$，

设 $t(x)=e^x-x$，则 $t'(x)=e^x-1$，

所以当 $x>0$ 时，$t'(x)>0$，$t(x)$ 单调递增，所以 $t(x)=e^x-x\ge t(0)=1$，$e^x\ge 1+x$.

所以 $k'(x)>e^x-\dfrac{1}{1+x}-x>1-\dfrac{1}{1+x}>0$，$k(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

所以 $k(x)>k(0)=2$，即 $e^x-\ln(1+x)+\cos x>2$.

综上所述，$x_1<x_3$.