2020-2021学年度第二学期期末学业水平诊断

高二数学参考答案

一、单选题

DBAA　CBBD

二、多选题

9. AC　10. BCD　11. ACD　12. BD

三、填空题

13. $(0,2]$　14. $[2,3]$　15. 1　16. $\sqrt{3}$

四、解答题

17. 解：（1）当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=(-x)-\sin(-x)=-x+\sin x$，⋯⋯⋯2分

又 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)=f(-x)=-x+\sin x$.⋯⋯⋯4分

（2）当 $x\ge 0$ 时，$f'(x)=(x-\sin x)'=1-\cos x\ge 0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增. ⋯⋯⋯6分

又 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(2m)>f(m-1)\Leftrightarrow f(|2m|)>f(|m-1|)$.

所以 $|2m|>|m-1|$，⋯⋯⋯8分

两边平方，整理得 $(3m-1)(m+1)>0$，

解得 $m<-1$ 或 $m>\frac{1}{3}$. ⋯⋯⋯10分

18. 解：（1）$f'(x)=x^2-4$. ⋯⋯⋯2分

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-2$ 或 $x=2$. ⋯⋯⋯3分

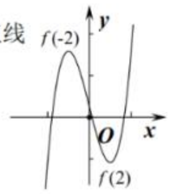
x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

⋯⋯⋯5分

因此，当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 有极大值，且极大值为 $f(-2)=\frac{19}{3}$. ⋯⋯⋯6分

当 $x=2$ 时，$f(x)$ 有极小值，且极小值为 $f(2)=-\frac{13}{3}$. ⋯⋯⋯7分

（2）方程 $f(x)=a$ 的实数解的个数，即为函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 的交点的个数. ……………………………………………9 分



当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

结合（1）知 $f(x)$ 的大致图象如右图所示.

所以，当 $a>\frac{19}{3}$ 或 $a<-\frac{13}{3}$ 时，解为1个；…………………………………… 10 分

当 $a=\frac{19}{3}$ 或 $a=-\frac{13}{3}$ 时，解为2个；……………………………………………… 11 分

当 $-\frac{13}{3}<a<\frac{19}{3}$ 时，解为3个. ………………………………………………………… 12 分

19. 解：（1）要使 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，只需 $4^x+k\cdot2^x+1>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立. ……2 分

令 $t=2^x>0$，只需 $y=t^2+kt+1>0$ 在 $t>0$ 上恒成立.

当 $-\frac{k}{2}\le0$，即 $k\ge0$ 时，$y(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单增，恒有 $y(t)>y(0)=1>0$，

因此，对任意 $k\ge0$ 均成立. ………………………………………………………………3 分

当 $-\frac{k}{2}>0$，即 $k<0$ 时，$y(t)$ 在 $(0,-\frac{k}{2})$ 单减，$(-\frac{k}{2},+\infty)$ 单增，只需 $f(-\frac{k}{2})>0$，

即 $\frac{k^2}{4}-\frac{k^2}{2}+1>0$，解得 $-2<k<2$，所以 $-2<k<0$. ……………………………5 分

综上，k 的取值范围为 $(-2,+\infty)$. ……………………………………………………………6 分

（2）若不等式 $f(x)<g(x)$ 有解，即 $\ln(4^x+k\cdot2^x+1)<x\ln2=\ln2^x$，

可得 $0<4^x+k\cdot2^x+1<2^x$ 有解. ……………………………………………………7 分

因为当 $x\to+\infty$ 时，$4^x+k\cdot2^x+1\to+\infty$，所以，对任意实数 k，总存在 $x_0>0$，使得 $4^{x_0}+k\cdot2^{x_0}+1>0$，即 $4^x+k\cdot2^x+1>0$ 有解. ……………………………………8 分

由 $4^x+k\cdot2^x+1<2^x$ 可得，$k-1<-(2^x+\frac{1}{2^x})$. ………………………………………9 分

令 $t=2^x>0$，$y=-t-\frac{1}{t}$，$y'=-1+\frac{1}{t^2}=\frac{(1-t)(1+t)}{t^2}$，…………………… 10 分

显然当$t\in(0,1)$时，函数单调递增，当$t\in(1,+\infty)$时，函数单调递减，

所以当$t=1$时，y取最大值-2，…………………………………………………… 11 分

所以$k-1<-2$，即$k<-1$. ……………………………………………………………… 12 分

20. 解：（1）由题意知，长方体容器的长、宽、高分别为$a-2x$，$\frac{5}{8}a-2x$，x，

容器的体积$V=(a-2x)(\frac{5}{8}a-2x)x$. ……………………………………………………2 分

令$a-2x>0$，$\frac{5}{8}a-2x>0$，$x>0$，可得$0<x<\frac{5}{16}a$. ……………………………4 分

故函数$V(x)=(a-2x)(\frac{5}{8}a-2x)x=4x^3-\frac{13}{4}ax^2+\frac{5}{8}a^2x$，$0<x<\frac{5}{16}a$. ……5 分

（2）令$V'(x)=12x^2-\frac{13}{2}ax+\frac{5}{8}a^2$. ……………………………………………6 分

令$V'(x)=0$，得$x_1=\frac{1}{8}a$，$x_2=\frac{5a}{12}$（舍去）. ………………………………8 分

x	$(0,\frac{1}{8}a)$	$\frac{1}{8}a$	$(\frac{1}{8}a,\frac{5}{16}a)$
$V'(x)$	+	0	−
$V(x)$	单调递增	极大值	单调递减

………………………………9 分

因此，$x=\frac{1}{8}a$是函数$V(x)$的极大值点，相应的极大值$V(\frac{a}{8})=\frac{9a^3}{256}$，

也是$V(x)$在区间$(0,\frac{5}{16}a)$上的最大值. ………………………………………… 11 分

答：截去的小正方形边长为$\frac{1}{8}a$时，容器的容积最大，最大容积$\frac{9a^3}{256}$. …………… 12 分

21. 解：（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，　$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x$. ……………1 分

当$0<x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x>1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.
……3分

因此，当$x=1$时，$f(x)_{\min}=f(1)=m-1$. ……4分

由题意，$f(x)_{\min}>0$， ……5分

即$m-1>0$，解得$m>1$. ……6分

（2）由（1）及$f(x)$的单调性知，$0<x_1<1<x_2$. ……7分

构造函数$g(x)=f(x)-f(2-x)$，$0<x<1$. ……8分

则$g'(x)=\ln x+\ln(2-x)=\ln[1-(x-1)^2]$， ……9分

当$0<x<1$时，$1-(1-x)^2<1$，$\ln[1-(x-1)^2]<0$，即$g'(x)<0$，

所以$g(x)$在区间$(0,1)$上单调递减. ……10分

因为$x_1<1$，所以$g(x_1)>g(1)=0$，即$f(x_1)>f(2-x_1)$.

由题意$f(x_2)=f(x_1)$，所以$f(x_2)>f(2-x_1)$. ……11分

因为$f(x)$在$(1,+\infty)$，且单调递增，$x_2>1$，$2-x_1>1$，

所以$x_2>2-x_1$，即$x_1+x_2>2$. ……12分

22. 解：（1）$f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$， ……1分

令$f'(x)>0$，得$x<1$；令$f'(x)<0$，得$x>1$. ……3分

所以$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,1)$，单调减区间为$(1,+\infty)$. ……4分

（2）由题意知 $g(x)=\dfrac{ae^x}{x}-x+\ln x$. ……5分

于是 $g'(x)=\dfrac{ae^x(x-1)}{x^2}-1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}(a-\dfrac{x}{e^x})$， ……6分

由（1）知，在$[1,+\infty)$上，$f(x)$单调递减，且$f(x)\in(0,\dfrac{1}{e}]$，

当$a\le 0$时，$g'(x)\le 0$，函数$g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减，取$x_0=e$，显然$e>1$，

但$g(e)=ae^{e-1}-e+1\le 1-e<-1$，因此，$a\le 0$不合题意. ……8分

当$0<a<\frac{1}{e}$时，结合（1）中$f(x)$的单调性知，存在$x_0\in(1,+\infty)$，使得$ae^{x_0}=x_0$，

此 时 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上 单 调 递 减 ， 在 $(x_0,+\infty)$ 上 单 调 递 增 ， 所 以

$g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{ae^{x_0}}{x_0}-x_0+\ln x_0$

$=1-x_0+\ln(ae^{x_0})=1+\ln a\geq -1$，

解得$a\geq\frac{1}{e^2}$，即$\frac{1}{e^2}\leq a<\frac{1}{e}$；…………………………………………………… 10 分

当$a\geq\frac{1}{e}$时，$g'(x)\geq 0$，函数$g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，$g(x)_{\min}=g(1)=ae-1\geq -1$，

解得$a\geq 0$，即$a\geq\frac{1}{e}$；

综上所述，a的取值范围$[\frac{1}{e^2},+\infty)$．…………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。