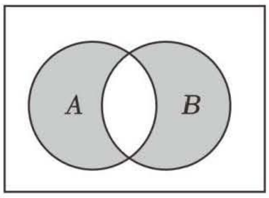
数学试题

考试时间：120 分　　　　总分：150 分

一．选择题：本小题 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知 $a\in R$，i 为虚数单位，若 $\dfrac{a-i}{3+i}$ 为实数，则 $a=(\quad)$

A.-3　　B.$\dfrac{1}{3}$　　C.3　　D.$-\dfrac{1}{3}$



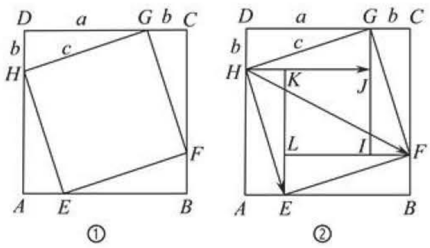
2.如图所示的 $Venn$ 图中，A、B 是非空集合，定义集合 $A\otimes B$ 为阴影部分表示的集合．若 $A=\{x\,|\,x=2n+1，n\in N，n\leqslant 4\}$，$B=\{2，3，4，5，6，7\}$，则 $A\otimes B=(\quad)$

A.$\{2，4，6，1\}$　B.$\{2，4，6，9\}$　C.$\{2，3，4，5，6，7\}$ D.$\{1，2，4，6，9\}$

3.已知函数 $f(x)$ 同时满足性质：① $f(-x)=f(x)$；②当 $\forall x_1，x_2\in(0,1)$ 时，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则函数 $f(x)$ 可能为(　　)

A. $f(x)=x^2$　　B. $f(x)=(\dfrac{1}{2})^x$　　C. $f(x)=\cos 4x$　　D. $f(x)=ln(1-|x|)$

4.我国古代数学家赵爽所使用的“勾股圆方图”是由四个全等的直角三角形与中间的一个小正方形拼成的一个大正方形．如图①，是一个“勾股圆方图”，设 $DG=a$，$DH=b$，$GH=c$；在正方形 $EFGH$ 中再作四个全等的直角三角形和一个小正方形 $IJKL$，且 $KE//AD$，如图②．若 $a=3b$，且 $\overrightarrow{HF}=\lambda\overrightarrow{HE}+\mu\overrightarrow{HJ}$ 则 $\lambda+\mu=(\quad)$



A.$\dfrac{7}{4}$　　B.$\dfrac{16}{9}$　　C.$\dfrac{19}{12}$　　D.$\dfrac{29}{16}$

5.某人同时掷两颗骰子，得到点数分别为 a，b，则椭圆 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的概率是(　　)

A.$\dfrac{5}{36}$　　B.$\dfrac{1}{6}$　　C.$\dfrac{1}{4}$　　D.$\dfrac{1}{3}$

6. 2021 年春节联欢晚会以“共圆小康梦，欢乐过大年”为主题，突出时代性、人民性、创新性，节目内容丰富多彩，呈现形式新颖多样，某小区的 5 个家庭买了 8 张连号的门票，其中甲家庭需要 3 张连号的门票、乙家庭需要 2 张连号的门票，剩余的 3 张随机分到剩余的 3 个家庭即可，则这 8 张门票分配到家庭的不同方法种数为(　　)

A.48　　B.72　　C.120　　D.240

7.若 $a=-\dfrac{ln3}{6ln2a}(a>\dfrac{1}{6})$，$b=\dfrac{ln2-ln7}{7ln2b}(b>\dfrac{1}{7})$，$(2c)^c=2^{-\frac{1}{4}}(c>\dfrac{1}{8})$，则(　　)

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $c<b<a$　　D. $a<c<b$

8．已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长 $AB=2\sqrt{3}$，其外接球的表面积为 20π，D 是 B_1C_1 的中点，点 P 是线段 A_1D 上的动点，过 BC 且与 AP 垂直的截面 α 与 AP 交于点 E，则三棱锥 $A-BCE$ 的体积的最大值为(　　)

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

二．选择题：本小题 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.已知二项式 $(\sqrt{x}-\frac{1}{2x})^n$ 的展开式中各项系数之和是 $\frac{1}{128}$，则下列说法正确的有(　　)

A．展开式共有 7 项

B．二项式系数最大的项是第 4 项

C．所有二项式系数和为 128

D．展开式的有理项共有 4 项

10．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})+\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$，将 $f(x)$ 图象上所有的点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变）得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{12})$ 上恰有一个极值点，则 ω 的取值可能是(　　　)

A.1　　B.3　　C.5　　D.7

11.已知 x，$y\in R$，$x>0$，$y>0$，且 $x+2y=xy$，则 $e^y-\frac{8}{x}$ 的不可能的取值为(　　)

（参考数据：$e^{1.1}\approx 3$，$e^{1.2}\approx 3.321$)

A. $\frac{5}{4}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $e-1$　　D. e

12．已知直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 交于 A、B 两点，点 F 为椭圆 C 的下焦点，则下列结论正确的是(　　)

A.当 $m=1$ 时，$\exists k\in R$，使得 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=3$

B.当 $m=1$ 时，$\forall k\in R$，使得 $|\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}|>2$

C.当 $k=1$ 时，$\exists m\in R$，使得 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=\frac{5}{2}$

D.当 $k=1$ 时，$\forall m\in R$，使得 $|\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}|>\frac{6}{5}$

三．填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 9 项的和为 27，$a_{10}=8$，则 $a_{15}=$_______.

14.某市统计高中生身体素质的状况，规定身体素质指标值不小于 60 就认为身体素质合

格．现从全市随机抽取 100 名高中生的身体素质指标值 $x_i(i=1，2，3，\dots，100)$，记这 100 名高中生身体素质指标值的平均分和方差分别为 $\overline{x},s^2$，经计算 $\sum_{i=1}^{100}x_i=7200$，$\sum_{i=1}^{100}x_i^2=100\times(72^2+36)$．若该市高中生的身体素质指标值服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，用 $\overline{x},s^2$ 的值分别作为 μ,σ^2 的近似值，则估计该市高中生身体素质的合格率为 ______．(用百分数作答，精确到0.1%)

参考数据：若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.6827$，$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.9545$，$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)\approx0.9973$．

15．已知 A，B，C，D，E 为抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 上不同的五点，抛物线焦点为 F，满足 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$，则 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|+|\overrightarrow{FD}|+|\overrightarrow{FE}|=$ ________．

16．（5 分）已知函数 $f(x)=|\dfrac{e}{x}+lnx|+|\dfrac{e}{x}-lnx|$，若关于 x 的方程 $f(x)=2ax+2$ 有 3 个不相等的实数解，则实数 a 的取值范围是_________．

四．解答题：（本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。）

17.记 T_n 为正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积，且 $a_1=1$，$a_2=2$，$T_nT_{n+2}=2T_{n+1}^2$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：$\dfrac{T_1}{T_2}+\dfrac{T_3}{T_4}+\dots+\dfrac{T_{2n-1}}{T_{2n}}<\dfrac{2}{3}$

18.在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$\sin A\cos B=2\sin A-\cos A\sin B$．

（1）求 $\dfrac{\sin C}{\sin A}$ 的值；

（2）若 $b=3$，从下列三个条件中选出一个条件作为已知，使得 ΔABC 存在且唯一确定，求 ΔABC 的面积．

条件①：$\cos B=\dfrac{11}{16}$；条件②：$\sin C=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$；条件③：$\Delta ABC$ 的周长为 9．

19.已知双曲线 C 的两焦点在坐标轴上，且关于原点对称．若双曲线 C 的实轴长为 2，焦距为 $2\sqrt{3}$，且点 $P(0,-1)$ 到渐近线的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

（1）求双曲线 C 的方程；

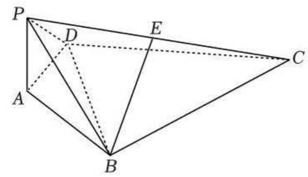
（2）若过点 P 的直线 l 分别交双曲线 C 的左、右两支于点 A、B，交双曲线 C 的两条渐近线于点 D、E(D 在 y 轴左侧)．记 ΔODE 和 ΔOAB 的面积分别为 S_1、S_2，求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的取值范围．

20．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA=AD=1$，$PB=BD=2$，$AB=\sqrt{3}$，$\angle BDC=60^\circ$，且 $BD\perp BC$．

（1）若 $BE//$ 平面 PAD，证明：点 E 为棱 PC 的中点；

（2）已知二面角 $P-AB-D$ 的大小为 $60°$，设平面 PBD 和平面 PCD 的夹角为 θ．

求证：θ 满足 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$．



21．为了精准地找到目标人群，更好地销售新能源汽车，某4S 店对近期购车的男性与女性各100位进行问卷调查，并作为样本进行统计分析，得到如下列联表 $(m, 40, m\in N)$：

	购买新能源汽车（人数）	购买传统燃油车（人数）
男性	$80-m$	$20+m$
女性	$60+m$	$40-m$

（1）当 $m=0$ 时，将样本中购买传统燃油车的购车者按性别采用分层抽样的方法抽取6人，再从这6人中随机抽取3人调查购买传统燃油车的原因，记这3人中女性的人数为 X，求 X 的分布列与数学期望；

（2）定义 $K^2=\sum\frac{(A_{ij}-B_{ij})^2}{B_{ij}}(2, i, 3, 2, j, 3, i, j\in N)$，其中 A_{ij} 为列联表中第 i 行第 j 列的实际数据，B_{ij} 为列联表中第 i 行与第 j 列的总频率之积再乘以列联表的总频数得到的理论频数．基于小概率值 α 的检验规则：首先提出零假设 H_0（变量 X，Y 相互独立），然后计算 K^2 的值，当 $K^2..x_\alpha$ 时，我们推断 H_0 不成立，即认为 X 和 Y 不独立，该推断犯错误的概率不超过 α；否则，我们没有充分证据推断 H_0 不成立，可以认为 X 和 Y 独立．根据 K^2 的计算公式，求解下面问题：

(i) 当 $m=0$ 时，依据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，请分析性别与是否喜爱购买新能源汽车有关；

（ii）当 $m<10$ 时，依据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，若认为性别与是否喜爱购买新能源汽车有关，则至少有多少名男性喜爱购买新能源汽车？

附：

α	0.1	0.025	0.005
x_α	2.706	5.024	7.879

22．（12分）已知函数 $f(x)=(lnx+1)x-mx^2+m$．

（1）若 $f(x)$ 单调递减，求 m 的取值范围；

（2）若 $f'(x)$ 的两个零点分别为 a，b，且 $2a<b$，证明：$ab^2>\frac{32}{e^6}$．

（参考数据：$ln2\approx0.69$）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。