河南省信阳高级中学2022-2023学年高三下期04月测试

（一）文数答案

一、选择题：ADCC　　CDBA　　CBBB

二、填空题：13. 3　　14. 2　　15. $(x-2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=9$　　16. ②③④

三、解答题

17.解析（1）

	30岁及以下	30岁以上	总计
闯红灯	20	60	80
未闯红灯	80	40	120
总计	100	100	200

由表中数据，得 $x^2=\frac{200\times(40\times20-60\times80)^2}{100\times100\times80\times120}\approx33.333$.

∵33.333>10.828，∴有99.9%的把握认为闯红灯与年龄有关.

（2）未进行处罚前，行人闯红灯的概率约为0.4，当处罚金额为10元时，行人闯红灯的概率约为$\frac{40}{200}=\frac{1}{5}=0.2$，故当处罚金额为10元时，行入闯红灯的概率比不进行处罚降低 0.2.

（3）①根据调查数据显示，行人闯红灯与年龄有明显关系，可以针对30岁以上人群开展“道路安全”宣传教育；②由于试行经济处罚可以明显降低行人闯红灯的概率，则可以进行适当经济处罚来降低行人闯红灯的概率.

18.【答案】（1）$B=\frac{\pi}{3}$　　（2）$\frac{21\sqrt{2}}{4}$

（1）由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$和$c\sin\frac{A+C}{2}=b\sin C$得：

$\sin C\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin C$，

∵ $C\in(0,\pi),\sin C\neq0$，∴ $\sin\frac{A+C}{2}=\sin B$，

又∵ $A+B+C=\pi$，∴ $\sin\frac{A+C}{2}=\sin\frac{\pi-B}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)=\cos\frac{B}{2}$，

又∵ $\sin B=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$，∴ $\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\Rightarrow\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$.

∵ $B\in(0,\pi),\cos\frac{B}{2}\neq0$，∴ $2\sin\frac{B}{2}=1$，∴ $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$

∵ $B\in(0,\pi)$，∴ $\frac{B}{2}=\frac{\pi}{6}$，∴ $B=\frac{\pi}{3}$.

（2）由第（1）问，$B=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{2}{\tan B}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

又$\because A+B+C=\pi$，

$\therefore \tan B=\tan\left[\pi-\left(A+C\right)\right]=-\tan\left(A+C\right)=-\dfrac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=\sqrt{3}$，

$\therefore \begin{cases}\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\\ -\dfrac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=\sqrt{3}\end{cases}$，解得$\begin{cases}\tan A=\sqrt{3}\\ \tan C=\sqrt{3}\end{cases}$，

$\because A\in\left(0,\pi\right),C\in\left(0,\pi\right)$，$\therefore A=C=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \Delta ABC$为等边三角形，

$\therefore \Delta ABC$的面积为$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{21}\times\sqrt{21}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{21\sqrt{3}}{4}$.

19.【解析】（1）证明：取线段PA的中点F，连接EF、FD，

则EF为ΔPAB的中位线，$\therefore EF \mathrel{\underline{\parallel}} \dfrac{1}{2}AB$

由题知$CD \mathrel{\underline{\parallel}} \dfrac{1}{2}AB$，$\therefore EF \mathrel{\underline{\parallel}} CD$，$\therefore$四边形$CEFD$为平行四边形.

$\therefore CE \parallel DF$.

$\because DF\subset$平面PAD，$CE\not\subset$平面PAD，$\therefore CE\parallel$平面PAD.

(2)当$PB=2\sqrt{2}$时，　平面$PAD\perp$平面$ABCD$.理由如下：

在ΔPAB中，$\because AB=PA=2,PB=2\sqrt{2}$，$\therefore AB\perp PA$.

又$\because AB\perp AD,AD\cap PA=A$，$\therefore AB\perp$平面$PAD$，　$AB\subset$平面$ABCD$，

$\therefore$平面$PAD\perp$平面$ABCD$. 全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》

$\because E$为PB的中点，$\therefore E$到平面PCD的距离等于点B到平面PCD的距离的一半.

$\because AB\perp$平面PAD，$\therefore CD\perp$平面PAD. $\therefore CD\perp PD$.

$\therefore S_{\Delta PCD}=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1.S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$

取AD中点O，连接PO，ΔPAD为等边三角形. 则$\because PO\perp AD,PO=\sqrt{3}$.

$\because$平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$\therefore PO\perp$平面$ABCD$.

设点B到平面PCD的距离为h.

由 $V_{P-BCD}=V_{B-PCD}$，得$\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot h$，解得$h=\sqrt{3}$.

∴点E到平面PCD的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20. 【答案】（1）$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$　（2）曲线C上存在两点P,Q满足$\angle APB=\angle AQB=90°$

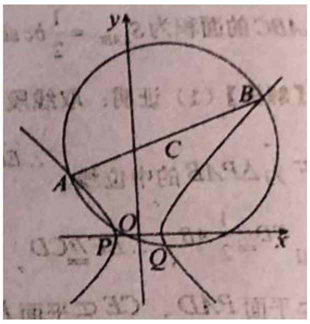
【详解】（1）设$M(x,y)$，由题意得$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{2}|x-1|$，化简得$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$

（2）存在两点$P,Q\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$和$\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$满足$\angle APB=\angle AQB=90°$.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(x_0,y_0)$

联立直线与双曲线方程，有$3x^2-4tx-4t^2-8=0$　$\Delta=16t^2+12(4t^2+8)>0$

由韦达定理，有$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{4}{3}t\\ x_1x_2=-\frac{4}{3}(t^2+2)\end{cases}$



$\overrightarrow{PA}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$，$\overrightarrow{PB}=(x_2-x_0,y_2-y_0)$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x_1-x_0)(x_2-x_0)+\left(\frac{1}{2}x_1+t-y_0\right)\left(\frac{1}{2}x_2+t-y_0\right)$

$=x_1x_2-(x_1+x_2)x_0+x_0^2+\left(\frac{1}{2}x_1+t\right)\left(\frac{1}{2}x_2+t\right)-\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)+2t\right)y_0+y_0^2$

$=x_0^2-\frac{4}{3}tx_0-\frac{10}{3}-\frac{8}{3}ty_0+y_0^2=\left(x_0^2+y_0^2-\frac{10}{3}\right)-\left(\frac{4}{3}x_0+\frac{8}{3}y_0\right)t=0$

注意到上式当$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=\frac{10}{3}\\ 4x_0+8y_0=0\end{cases}$时，上式恒成立，即过定点

$\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$和$\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，经检验两点恰在双曲线$C$上，且不与$A,B$重合，

故存在双曲线上两点P,Q满足$\angle APB=\angle AQB=90°$.

21.【答案】(1) $g(x)_{\min}=\begin{cases}-\ln a-\dfrac{1}{a}-1,0<a<1\\ -2,\ a\ge 1\end{cases}$ (2)详见解析

【详解】解:(1) $g(x)=ax^2-x+\ln x-(a+1)x,(x\ge 1)$

$g'(x)=2ax-1+\dfrac{1}{x}-(a+1)=\dfrac{(2x-1)(ax-1)}{x}(a>0)$

① 当$0<a<1$时,$\dfrac{1}{a}>1$时,

x	$\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$	$\dfrac{1}{a}$	$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	单调递减	极小值	单调递增

$\therefore g(x)_{\min}=g\left(\dfrac{1}{a}\right)=a\cdot\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{a}+\ln\dfrac{1}{a}-(a+1)\dfrac{1}{a}=-\ln a-\dfrac{1}{a}-1$

② 当$a\ge 1$时,$\dfrac{1}{a}\le 1$,在$[1,+\infty)$上,$g'(x)>0$,$g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,

$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=-2$

由①②知,$\therefore g(x)_{\min}=\begin{cases}-\ln a-\dfrac{1}{a}-1,0<a<1\\ -2,a\ge 1\end{cases}$

(2)设切线方程为$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

记$h(x)=f(x)-f'(x_0)x+f'(x_0)x_0-f(x_0)$,

$h(x_0)=0$,$h'(x)=f'(x)-f'(x_0)$,$h'(x_0)=0$,$h''(x)=f''(x)=2a-\dfrac{1}{x^2}<0$

$\therefore h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,

$x\in(0,x_0)$,$h'(x)>0$,$h(x)$在$(0,x_0)$上单调递增,

$x\in(x_0,+\infty)$,$h'(x)<0$,$h(x)$在$(x_0,+\infty)$上单调递减,

$\therefore h(x)_{\max}=h(x_0)=0$,即$f(x)<f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$,当且仅当$x=x_0$时取"="。

自主选拔在线 微信号:zizzsw

故原命题成立.

22. 解：（1）直线：$y=\frac{1}{k}x\left(k\in R,且k\neq 0\right)$与动直线：$k=-k\left(x-4\right)$的交点为

$P\left(x_0,y_0\right)$，所以：$y_0=\frac{1}{k}x_0$和$y_0=k\left(x_0-4\right)$，消去参数k得到

$x_0{}^2-4x_0+y_0{}^2=0\left(y_0=0\right)$

根据$\begin{cases}x_0=\rho\cos\theta\\ y_0=\rho\sin\theta\\ x_0^2+y_0^2=\rho^2\end{cases}$ 转换为极坐标方程为$\rho=4\cos\theta(\rho\neq 0且\rho\neq 4)$.

（2）把$\rho=4\cos\theta$代入$\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0$，

得到$4\cos\theta\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=\sqrt{3}$，整理得$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=0$，

解得：$\theta=\frac{\pi}{3}$或$-\frac{\pi}{6}$，

所以曲线C_1与曲线C_2的交点的极坐标为$\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$或$\left(2\sqrt{3},-\frac{\pi}{6}\right)$.

23. （1）证明：

$\because\left|2x+3y-2a-3b\right|=\left|2\left(x-a\right)+3\left(y-b\right)\right|\leq 2\left|x-a\right|+3\left|y-b\right|<2\times\frac{\varepsilon}{4}+3\times\frac{\varepsilon}{6}=\varepsilon$

所以$\left|2x+3y-2a-3b\right|<\varepsilon$

（2）法一：

$y=5\sqrt{x-1}+\sqrt{10-2x}=5\cdot\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-x}\leq\sqrt{5^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2+\left(\sqrt{5-x}\right)^2}=6\sqrt{3}$

当且仅当$5\sqrt{5-x}=\sqrt{2}\sqrt{x-1}$去等号，解得$x=\frac{127}{27}$.

即$x=\frac{127}{27}$时取得最大值$6\sqrt{3}$.

法二：

由$\begin{cases}x-1\geq 0\\ 10-2x\geq 0\end{cases}$解得$1\leq x\leq 5$，

$\therefore$函数$y=5\sqrt{x-1}+\sqrt{10-2x}$的，定义域为$[1,5]$.

$y'=\frac{5}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{10-2x}}=\frac{5\sqrt{10-2x}-2\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}\sqrt{10-2x}}$，令$y'=0$，解得$x=\frac{127}{27}$.

当 $x\in\left[1,\dfrac{127}{27}\right]$ 时， $y'>0$，此时函数单调递增；

当 $x\in\left[\dfrac{127}{27},5\right]$ 时， $y'<0$，此时函数单调递减.

因此函数在 $x=\dfrac{127}{27}$ 时取得最大值， $y=5\sqrt{\dfrac{127}{27}-1}+\sqrt{10-2\times\dfrac{127}{27}}=6\sqrt{3}$.

自主选拔在线 微信号：zizzsw