高三数学参考答案

选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	C	A	C	B	D	A	ACD	ABC	BCD	ABC

1.B　解析：$B=\{x|(x-1)^2\le 1\}=\{x|-1\le x-1\le 1\}=\{x|0\le x\le 2\}$，$\therefore A\cap B=\{1,2\}$.

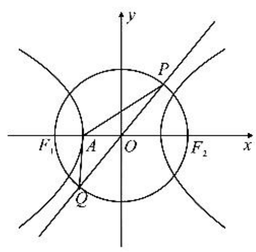
2.C　解析：$z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$，∴$z$ 的虚部为 -1，$|z|=\sqrt{2}$，$z^2=-2\mathrm{i}$ 为纯虚数，$\bar{z}=1+\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点位于第一象限，故选 C.

3.C　解析：$f(\log_2 3)=4^{\log_2 3-\frac{1}{2}}=2^{\log_2 3^2-1}=2^{\log_2\frac{9}{2}}=\dfrac{9}{2}$.

4.A　解析：数列$\{a_n\}$为等比数列，则$\{|a_n|\}$也为等比数列，且$|a_n|>0$，∴$\{\lg|a_n|\}$为等差数列，反之“数列$\{\lg|a_n|\}$为等差数列”推不出“数列$\{a_n\}$为等比数列”（a_n 正负随取构不成等比数列），故选 A.

5.C　解析：$(1+2x)^n$ 展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1}=C_n^r(2x)^r=C_n^r2^rx^r$. ∵$a_5=a_6$，∴$C_n^5 2^5=C_n^6 2^6$，即 $C_n^5=2C_n^6$，∴$\dfrac{n!}{5!\ (n-5)!}=2\times\dfrac{n!}{6!\ (n-6)!}$，整理得 $n-5=3$，∴$n=8$.

6.B　解析：由题意漏下来的沙子是全部沙子的$\dfrac{19}{27}$，下方圆锥的空白部分就是上方圆锥中的沙子部分，∴可以单独研究下方圆锥，∴$\dfrac{V_{上}}{V_{全}}=\dfrac{8}{27}=(\dfrac{h_{上}}{h_{全}})^3$，∴$\dfrac{h_{上}}{h_{全}}=\dfrac{2}{3}$，∴$\dfrac{h_{上}}{h_{下}}=\dfrac{2}{1}$.



7.D　解析：设以 F_1F_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=c^2$，$P(x_0,\ y_0)$，则 $Q(-x_0,\ -y_0)$，由$\begin{cases}y=\dfrac{b}{a}x\\x^2+y^2=c^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$或$\begin{cases}x=-a\\y=-b\end{cases}$，∴$P(a,\ b)$，$Q(-a,\ -b)$. ∵$A(-a,\ 0)$，$\angle PAQ=\dfrac{3\pi}{4}$，∴$\angle PAF_2=\dfrac{\pi}{4}$，∴$\tan\angle PAF_2=1=\dfrac{b}{2a}$，∴$b^2=4a^2$，即 $c^2-a^2=4a^2$，∴$c^2=5a^2$，∴$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}$.

8.A　解析：∵$f(-x)=f(x)$，$f(-x)+f(x-2)=0$，∴$f(x)=-f(2-x)$，∴$f(x)$的图象关于直线$x=0$和点$(1,0)$对称，∴$f(x)$的周期为4.求导易知$f(x)$在$[-1,0]$递增，由对称性知$f(x)$在$[0,1],[1,2]$递减，∴$f(2022)=f(505\times 4+2)=f(2)$，$f(\log_2\dfrac{3}{10})=f(\log_2\dfrac{10}{3})$.∵$\log_2\dfrac{10}{3}\in(\dfrac{3}{2},2)$，$e^{0.3}\in(1,\dfrac{3}{2})$，∴$f(2022)<f(\log_2\dfrac{10}{3})<f(e^{0.3})$.

9.ACD　解析：观察折线图知甲同学体温的极差为$36.6-36.2=0.4$℃，A 正确；将甲同学的体温从小到大排成一列：36.4℃，36.4℃，36.6℃，36.6℃，36.7℃，36.7℃，36.8℃，因为$7\times 75\%=5.25$，所以甲同学体温的第 75 百分位数为 36.7℃，B 错误；乙同学体温从小到大排成一列：36.5℃，36.5℃，36.6℃，36.6℃，36.6℃，36.7℃，36.7℃，乙同学体温的众数为 36.6℃，中位数为 36.6℃，平均数$\bar{x}=\dfrac{1}{7}\times(36.5\times 2+36.6\times 3+36.7\times 2)=36.6$ ℃，C 正确；乙同学的体温波动较甲同学的小，极差为 0.2℃，也比甲同学的小，因此乙同学的体温比甲同学的体温稳定，D 正确.

10.ABC　解析：由 $2=a+b\geqslant 2\sqrt{ab}\Rightarrow ab\leqslant 1$，$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4-2ab\geqslant 2$，

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab]\geq(a+b)[(a+b)^2-\frac{3}{4}(a+b)^2]=2$，当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立，$\therefore$ABC 正确；$(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+2})^2=a+1+b+2+2\sqrt{(a+1)(b+2)}\leq 2(a+1+b+2)=10$，当且仅当 $a+1=b+2$，即 $a=\frac{3}{2},b=\frac{1}{2}$ 时等号成立，$\therefore\sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}\leq\sqrt{10}$，D 错误.

11.BCD　**解析**：该正三棱柱内可放入的最大球的半径为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$，体积为 $\frac{4\pi}{3}\cdot(\frac{\sqrt{3}}{3})^3=\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$，故 A 错误；该正三棱柱的外接球半径 $R=\sqrt{1^2+(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2}=\sqrt{\frac{7}{3}}$，表面积为 $4\pi\cdot(\sqrt{\frac{7}{3}})^2=\frac{28\pi}{3}$，B 正确；当 P 为 CC_1 中点时，易证 $AB_1\perp$ 平面 PA_1B，故 C 正确；建立空间直角坐标系，根据点到直线的距离公式可求得当 P 为 CC_1 中点时，点 P 到直线 A_1B 的距离取得最小值为 $\sqrt{3}$（或将点 P 到直线 A_1B 的距离投影到底面易知），D 正确.

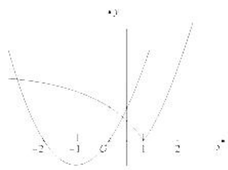
12.ABC　解析：$\because\overrightarrow{F_1F_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{F_1M}+\frac{2}{3}\overrightarrow{F_1N}$，$\therefore M$，$F_2$，$N$ 三点共线，设 $|MN|=3t$，则 $F_1M|=4t$，$|MF_2|=2t$，$|NF_2|=t$，$\therefore 2a=6t$，$|F_1N|=5t$，$\therefore\angle F_1MF_2=90°$，$|F_1F_2|=2\sqrt{5}t=2c$，$\therefore e=\frac{\sqrt{5}}{3}$，故 ABC 正确.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 1　　14. $\frac{\pi}{2}$（答案不唯一）　　15. $[0,1)$　　16. $[-\frac{1}{2},12]$

13.1　**解析**：曲线 $y=x\ln x$ 在点(1，0)处的切线方程为 $y=x-1$，由 $\begin{cases}y=x-1\\y=ax^2-x\end{cases}$ 得 $ax^2-2x+1=0$，由 $\Delta=4-4a=0$，解得 $a=1$.

14.$\frac{\pi}{2}$（答案不唯一）　**解析**：函数 $y=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$ 的图象先向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位，得到 $y=\sqrt{2}\cos(x-\varphi+\frac{\pi}{4})$ 的图象，再将所得的图象上每个点的横坐标变为原来的 a 倍，得到 $y=\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}\cos(2x-\frac{\pi}{4})$ 的图象，$\therefore a=\frac{1}{2}$，$-\varphi+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{4}$，解得 $\varphi=-2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，故 φ 的一个可能取值为 $\frac{\pi}{2}$.



15.$[0,1)$　解析：$y=x^2+2x$ 有 2 个零点 $x=-2$ 和 $x=0$，$y=|2^x-2|$ 有 1 个零点 $x=1$，由图可得当 $0\leqslant a<1$ 时，$f(x)$ 有 3 个零点.

16.$[-\frac{1}{2},12]$　解析：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=4+\frac{(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})^2-\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OC}^2}{2}=\frac{(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})^2-1}{2}$，易知 $0\leq|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|\leq 5$，

$\therefore\frac{(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})^2-1}{2}\in[-\frac{1}{2},12]$，$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的取值范围是 $[-\frac{1}{2},12]$.

四、解答题（本大题共6小题，共70分）

17.解析：（1）由$S_{n+1}=3S_n+2$得$S_{n+1}+1=3\left(S_n+1\right)$，即$\frac{S_{n+1}+1}{S_n+1}=3$，（3分）

又$S_1+1=a_1+1=3$，∴$\{S_n+1\}$是以3为首项，3为公比的等比数列.（4分）

（2）由（1）可得$S_n+1=3\times3^{n-1}=3^n$，即$S_n=3^n-1$.（6分）

当$n\geq2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n-1-\left(3^{n-1}-1\right)=2\cdot3^{n-1}$，（9分）

又$a_1=2$满足$a_n=2\cdot3^{n-1}$，∴$a_n=2\cdot3^{n-1}$.（10分）

18.解析：(1)该考生报考乙大学在笔试环节恰好通过两门科目的概率为

$P=(1-\frac{1}{3})\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times(1-\frac{2}{3})\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times(1-\frac{1}{2})=\frac{7}{18}$.(3分)

(2)∵甲通过的考试科目数$X\sim B(3,\frac{1}{2})$，∴$E(X)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.（5分）

设乙通过的考试科目数为Y，则$P(Y=0)=(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{2}{3})\times(1-m)=\frac{2}{9}(1-m)$，（6分）

$P(Y=1)=(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{2}{3})\times m+(1-\frac{1}{3})\times\frac{2}{3}\times(1-m)+\frac{1}{3}\times(1-\frac{2}{3})\times(1-m)=\frac{5}{9}-\frac{1}{3}m$，（7分）

$P(Y=2)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times(1-m)+\frac{1}{3}\times(1-\frac{2}{3})\times m+(1-\frac{1}{3})\times\frac{2}{3}\times m=\frac{2}{9}+\frac{1}{3}m$，（8分）

$P(Y=3)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times m=\frac{2}{9}m$，（9分）

∴$E(Y)=0\times\frac{2}{9}(1-m)+1\times(\frac{5}{9}-\frac{1}{3}m)+2\times(\frac{2}{9}+\frac{1}{3}m)+3\times\frac{2}{9}m=m+1$，（10分）

∵该考生更希望通过乙大学的笔试，∴$E(Y)>E(X)$，∴$m+1>\frac{3}{2}$，∴$\frac{1}{2}<m<1$.

∴当该考生更希望通过乙大学的笔试时，m的取值范围是$(\frac{1}{2},1)$.（12分）

19．解析：(1)∵$\sin(A+C)=\sin B=\frac{2\times\frac{1}{2}ac\sin B}{b^2-a^2}$，∴$b^2-a^2=ac$，（2分）

由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c^2+ac}{2bc}=\frac{c+a}{2b}$，（4分）

由正弦定理得$\sin C+\sin A=2\cos A\sin B$，即$\sin A\cos B+\cos A\sin B+\sin A=2\cos A\sin B$，

∴$\sin(B-A)=\sin A$，∴$B=2A$.(6分)

(2)由已知及正弦定理得$\frac{3}{\sin A}=\frac{b}{\sin 2A}$，∴$b=6\cos A=4$.（8分）

由余弦定理得$\frac{2}{3}=\frac{16+c^2-9}{8c}$，解得$c=\frac{7}{3}$或3.（10分）

当$c=3$时，$A=C$，$A=45°$，矛盾，舍去，∴$c=\frac{7}{3}$.(12分)

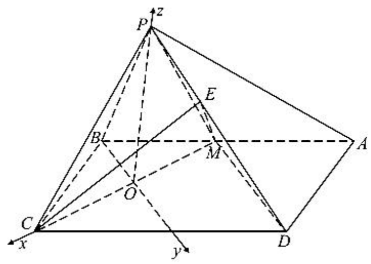
20．解析：(1)取线段 CM 的中点 O，连接 BO，PO，

$\because \angle PMB=\frac{\pi}{3}$，$PM=BM$，$\therefore \triangle PMB$ 为等边三角形，

$\therefore PB=PM=PC=BM=BC$，$\therefore BO\perp CM$，$PO\perp CM$.（2 分）

$\because \angle CBM=\angle CPM=\frac{\pi}{2}$，$\therefore BO=PO=\frac{1}{2}CM=\frac{\sqrt{2}}{2}PB$，

$\therefore BO^2+PO^2=PB^2$，$\therefore \angle POB=\frac{\pi}{2}$，（4 分）



$\because CM\cap BO=O$，$\therefore PO\perp$ 平面 $AMCD$.

$\because PO\subset$ 平面 PMC，$\therefore$ 平面 $PMC\perp$ 平面 $AMCD$.(5 分)

(2)由(1)知 OP，CM，OB 相互垂直，以 O 为坐标原点，OC，OB，OP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示空间直角坐标系 $Oxyz$.（6 分）

设 $AB=2AD=2\sqrt{2}$，则 $CM=2$，$PO=BO=1$，连接 DM，则 $DM\perp CM$，且 $DM=2$，

$\therefore P(0,0,1)$，$C(1,0,0)$，$D(-1,2,0)$，$M(-1,0,0)$，

$\therefore \overrightarrow{MC}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{PD}=(-1,2,-1)$，$\overrightarrow{PC}=(1,0,-1)$，

设 $\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PD}=(-\lambda,2\lambda,-\lambda)$，$\lambda\in(0,1)$，则 $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PE}=(\lambda+1,-2\lambda,\lambda-1)$，

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 ECM 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MC}=2x=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}=(\lambda+1)x-2\lambda y+(\lambda-1)z=0\end{cases}$，

令 $y=1$ 得 $\boldsymbol{n}=(0,1,\frac{2\lambda}{\lambda-1})$，（9 分）

$\because$ 平面 PCM 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$，（10 分）

$\therefore |\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2\lambda}{\lambda-1})^2}}=\cos\frac{\pi}{4}$，解得 $\lambda=-1$(舍)或 $\lambda=\frac{1}{3}$，

$\therefore$ 当点 E 在线段 DP 上，满足 $PE=\frac{1}{3}PD$ 时，二面角 E-CM-P 的大小为 $\frac{\pi}{4}$.(12 分)

21.解析：(1)当 P 在 y 轴上时，即 $P(0,-1)$，

设过点 P 的切线方程为 $y=kx-1$，与 $x^2=2py$ 联立得 $x^2-2pkx+2p=0$，

由直线和抛物线相切可得 $\Delta=4p^2k^2-8p=0$，$x_Ax_B=2p$，$y_A=y_B$，$\therefore A(\sqrt{2p},1)$，$B(-\sqrt{2p},1)$，（3 分）

由 $OA\perp OB$ 可得 $\sqrt{2p}\cdot(-\sqrt{2p})+1\times1=0$，解得 $p=\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $x^2=y$.(5 分)

(2)$x^2=y$，$\therefore y'=2x$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y-y_1=2x_1(x-x_1)$，即 $2x_1x=y+y_1$，

同理可得 $2x_2x=y+y_2$，（8 分）

又 P 为直线 $y=x-1$ 上的动点，设 $P(t,t-1)$，则 $2x_1t=t-1+y_1$，$2x_2t=t-1+y_2$，

由两点确定一条直线可得 AB 的方程为 $2xt=t-1+y$，即 $t(2x-1)-(y-1)=0$，（10 分）

∴直线 AB 恒过定点 $M(\frac{1}{2},1)$，∴点 O 到直线 AB 距离的最大值为 $|OM|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.(12 分)

22．**解析**：(1)$a=2$ 时，$f(x)=e^x-2x-\cos x$，$f'(x)=e^x-2+\sin x$，（1 分）

当 $x\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；（2 分）

当 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$f'(x)$单调递增，$f'(0)=-1$，$f'(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}-1>0$，当 $x>\frac{\pi}{2}$时，$f'(x)$显然大于 0，

∴存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(x_0)=0$，∴$f(x)$在$(-\infty,x_0)$递减，在$(x_0,+\infty)$递增，（4 分）

∵$f(0)=0$，$f(x_0)<0$，$f(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}-\pi>0$，∴$f(x)$有两个零点.（5 分）

(2)$g(x)=e^x-ax-\cos x+\ln(x+1)$，$g'(x)=e^x-a+\sin x+\frac{1}{x+1}$，

显然 $x=0$ 是 $g(x)$的极小值点的必要条件为 $g'(0)=2-a=0$，即 $a=2$，（6 分）

此时 $g'(x)=e^x+\frac{1}{x+1}+\sin x-2$，

令 $h(x)=g'(x)=e^x+\frac{1}{x-1}+\sin x-2$，则 $h'(x)=e^x+\cos x-\frac{1}{(x+1)^2}$，

显然 $h'(x)$在$(-1,0)$递增，$h'(-\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{2}}+\cos\frac{1}{2}-4<0$，$h'(0)=1>0$，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，$e^x>1$，$\cos x>0$，$0<\frac{1}{(x+1)^2}<1$，

∴$h'(x)>0$，当 $x>\frac{\pi}{2}$时，$e^x>2$，$-1<\cos x<1$，$0<\frac{1}{(x+1)^2}<1$，∴$h'(x)>0$，∴$h'(x)$存在唯一的零点 x_0，且 $x_0\in(-1,0)$，∴$h(x)$在$(-1,x_0)$递减，$(x_0,+\infty)$递增，（9 分）

∵$x\to-1$ 时，$h(x)\to+\infty$，$h(0)=0$，∴$h(x)$在$(-1,0)$存在唯一的零点 x_1，（10 分）

当 $x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)=e^x+\frac{1}{x-1}+\sin x-2>g'(0)=0$，

∴$g(x)$在$(-1,x_1)$递增，在$(x_1,0)$递减，在$(0,+\infty)$递增，

∴当 $a=2$ 时，$x=0$ 是 $g(x)$的极小值点.（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。