数 学 试 题

80000003

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知M,N均为$\mathbf{R}$的子集，且$\complement_{\mathbf{R}}M\subseteq N$，则$M\cup(\complement_{\mathbf{R}}N)=$

A. $\varnothing$　　B. M　　C. N　　D. $\mathbf{R}$

2. 在3张卡片上分别写上3位同学的学号后，再把卡片随机分给这3位同学，每人1张，则恰有1位学生分到写有自己学号卡片的概率为

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

3. 关于x的方程$x^2+ax+b=0$，有下列四个命题：

甲：$x=1$是该方程的根；　　乙：$x=3$是该方程的根；

丙：该方程两根之和为2；　　丁：该方程两根异号.

如果只有一个假命题，则该命题是

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

4. 椭圆$\frac{x^2}{m^2+1}+\frac{y^2}{m^2}=1(m>0)$的焦点为$F_1,F_2$，上顶点为$A$，若$\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$，则$m=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

5. 已知单位向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，若向量$\boldsymbol{c}=\sqrt{7}\boldsymbol{a}+\sqrt{2}\boldsymbol{b}$，则$\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=$

A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{9}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{9}$

6. $(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^9$的展开式中$x^2$的系数是

A. 60　　B. 80　　C. 84　　D. 120

7. 已知抛物线$y^2=2px$上三点$A(2,2),B,C$，直线AB,AC是圆$(x-2)^2+y^2=1$的两条切线，则直线BC的方程为

A. $x+2y+1=0$　　B. $3x+6y+4=0$　　C. $2x+6y+3=0$　　D. $x+3y+2=0$

8. 已知$a<5$且$ae^5=5e^a$，$b<4$且$be^4=4e^b$，$c<3$且$ce^3=3e^c$，则

A. $c<b<a$　　B. $b<c<a$　　C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 已知函数 $f(x)=x\ln(1+x)$，则

A. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增

B. $f(x)$ 有两个零点

C. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-\frac{1}{2},f(-\frac{1}{2}))$ 处切线的斜率为 $-1-\ln 2$

D. $f(x)$ 是偶函数

10. 设 z_1,z_2,z_3 为复数，$z_1\neq 0$. 下列命题中正确的是

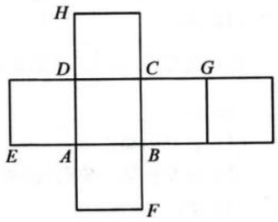
A. 若 $|z_2|=|z_3|$，则 $z_2=\pm z_3$

B. 若 $z_1z_2=z_1z_3$，则 $z_2=z_3$

C. 若 $\bar{z}_2=z_3$，则 $|z_1z_2|=|z_1z_3|$

D. 若 $z_1z_2=|z_1|^2$，则 $z_1=z_2$

11. 右图是一个正方体的平面展开图，则在该正方体中



A. $AE \parallel CD$

B. $CH \parallel BE$

C. $DG \perp BH$

D. $BG \perp DE$

12. 设函数 $f(x)=\frac{\cos 2x}{2+\sin x\cos x}$，则

A. $f(x)=f(x+\pi)$

B. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$

C. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4},0)$ 单调递增

D. $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 单调递减

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 圆台上、下底面的圆周都在一个直径为10的球面上，其上、下底面半径分别为4和5，则该圆台的体积为______.

14. 若正方形一条对角线所在直线的斜率为2，则该正方形的两条邻边所在直线的斜率分别为______，______.

15. 写出一个最小正周期为2的奇函数 $f(x)=$______.

16. 对一个物理量做 n 次测量，并以测量结果的平均值作为该物理量的最后结果. 已知最后结果的误差 $\varepsilon_n\sim N(0,\frac{2}{n})$，为使误差 ε_n 在 $(-0.5,0.5)$ 的概率不小于0.9545，至少要测量______次（若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(|X-\mu|<2\sigma)=0.9545$）.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n$.

(1) 证明：数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 为等比数列；

(2) 若 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{3}{2}$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. (12分)

在四边形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AD=BD=CD=1$.

(1) 若 $AB=\frac{3}{2}$，求 BC；

(2) 若 $AB=2BC$，求 $\cos\angle BDC$.

19. (12分)

一台设备由三个部件构成，假设在一天的运转中，部件1，2，3需要调整的概率分别为0.1，0.2，0.3，各部件的状态相互独立.

(1) 求设备在一天的运转中，部件1，2中至少有1个需要调整的概率；

(2) 记设备在一天的运转中需要调整的部件个数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

20.（12分）

北京大兴国际机场的显著特点之一是各种弯曲空间的运用. 刻画空间的弯曲性是几何研究的重要内容. 用曲率刻画空间弯曲性，规定：多面体顶点的曲率等于2π与多面体在该点的面角之和的差（多面体的面的内角叫做多面体的面角，角度用弧度制），多面体面上非顶点的曲率均为零，多面体的总曲率等于该多面体各顶点的曲率之和. 例如：正四面体在每个顶点有3个面角，每个面角是$\frac{\pi}{3}$，所以正四面体在各顶点的曲率为$2\pi-3\times\frac{\pi}{3}=\pi$，故其总曲率为$4\pi$.

（1）求四棱锥的总曲率；

（2）若多面体满足：顶点数－棱数＋面数＝2，证明：这类多面体的总曲率是常数.

21.（12分）

双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左顶点为$A$，右焦点为$F$，动点$B$在$C$上. 当$BF\perp AF$时，$|AF|=|BF|$.

（1）求C的离心率；

（2）若B在第一象限，证明：$\angle BFA=2\angle BAF$.

22.（12分）

已知函数$f(x)=e^x-\sin x-\cos x, g(x)=e^x+\sin x+\cos x$.

（1）证明：当$x>-\frac{5\pi}{4}$时，$f(x)\geq 0$；

（2）若$g(x)\geq 2+ax$，求a.

数学试题参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。

1. B　2. C　3. A　4. C　5. B　6. D　7. B　8. D

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

9. AC　10. BC　11. BCD　12. AD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 61π　14. $\frac{1}{3}$，-3　15. $\sin \pi x$　16. 32

四、解答题：共70分。

17. **解：**

（1）由题设得$a_{n+2}+a_{n+1}=3a_{n+1}+3a_n=3(a_{n+1}+a_n)$，且$a_n+a_{n+1}\neq 0$.

因此数列$\{a_n+a_{n+1}\}$是首项为a_1+a_2，公比为3的等比数列.

（2）由（1）知$a_n+a_{n+1}=(a_1+a_2)3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$，于是$a_{n+1}-\frac{3^n}{2}=-(a_n-\frac{3^{n-1}}{2})$.

又$a_1-\frac{1}{2}=0$，故$a_n-\frac{3^{n-1}}{2}=0$.

因此$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{3^{n-1}}{2}$.

18. **解：**

（1）在$\triangle ABD$中，由余弦定理得$\cos\angle ABD=\dfrac{1+(\frac{3}{2})^2-1}{2\times 1\times\frac{3}{2}}=\frac{3}{4}$.

由题设得$\angle BDC=\angle ABD$，所以$\cos\angle BDC=\frac{3}{4}$.

在$\triangle CBD$中，由余弦定理得$BC^2=1+1-2\cos\angle BDC=\frac{1}{2}$，故$BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 设 $\angle BDC=\alpha$，则 $BC=2\sin\frac{\alpha}{2}$，$AB=2\cos\alpha$.

由已知得 $\cos\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}$，即 $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}-1=0$.

解得 $\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$（舍去），$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

故 $\cos\alpha=\sqrt{3}-1$，即 $\cos\angle BDC=\sqrt{3}-1$.

19. 解：

用 A_i 表示事件“设备在一天的运转中，部件 i 需要调整”，$i=1,2,3$.

(1) 用 A 表示事件“设备在一天的运转中，部件 1，2 中至少有 1 个需要调整”.

则 $\overline{A}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}$，且 $\overline{A_1}$，$\overline{A_2}$ 相互独立.

从而 $P(\overline{A})=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=P(\overline{A_1})(\overline{A_2})=(1-0.1)(1-0.2)=0.72$，

$P(A)=1-P(\overline{A})=0.28$.

(2) X 的可能取值为 0，1，2，3.

$P(X=0)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=(1-0.1)(1-0.2)(1-0.3)=0.504$，

$$\begin{aligned}P(X=1)&=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)\\&=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)\\&=P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)\\&=0.10\times0.80\times0.70+0.90\times0.20\times0.70+0.90\times0.80\times0.30\\&=0.398,\end{aligned}$$

$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.1\times0.2\times0.3=0.006$，

$$\begin{aligned}P(X=2)&=1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=3)]\\&=1-(0.504+0.398+0.006)\\&=0.092.\end{aligned}$$

X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.504	0.398	0.092	0.006

X 的数学期望

$$\begin{aligned}EX&=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)+3\times P(X=3)\\&=0\times0.504+1\times0.398+2\times0.092+3\times0.006\\&=0.6.\end{aligned}$$

20. 解：

(1) 四棱锥共有 5 个顶点，5 个面. 四棱锥所有面角之和等于 4 个三角形内角之和再加上 1 个四边形内角之和.

所以四棱锥的总曲率为 $5\times2\pi-4\times\pi-2\pi=4\pi$.

(2) 设多面体顶点数为 V，棱数为 E，面数为 F.

多面体的总曲率 $=V\times2\pi-$ 多面体所有面角之和

$=V\times2\pi-$ 多面体的所有面的内角之和.

多面体的面均为多边形，由多边形的内角和公式可知，多面体的所有面的内角之和的计算过程中，每条棱都计算了两次，所以多面体的所有面的内角之和等于 $2E\times\pi-F\times2\pi$，从而多面体的总曲率为

$V\times2\pi-2E\times\pi+F\times2\pi=(V-E+F)\times2\pi=4\pi$.

因此，这类多面体的总曲率是常数.

21. 解：

(1) 当 $BF\perp AF$ 时，$|BF|=b\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}=\frac{b^2}{a}$，由已知得 $\frac{b^2}{a}=a+c$.

又 $c^2=a^2+b^2$，故 $2a^2+ac-c^2=0$，解得 $\frac{c}{a}=-1$（舍去），$\frac{c}{a}=2$.

所以 C 的离心率为 2.

(2) 由(1)得 $c=2a,b=\sqrt{3}a$.

设 $B(x_0,y_0)$，则 $x_0>0,y_0>0$，且 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{3a^2}=1$，即 $y_0^2=3x_0^2-3a^2$.

当 $x_0\neq c$ 时，$\tan\angle BAF=\frac{y_0}{x_0+a}$，$\tan\angle BFA=\frac{-y_0}{x_0-c}$.

所以 $\tan 2\angle BAF=\frac{2\tan\angle BAF}{1-\tan^2\angle BAF}=\frac{2(x_0+a)y_0}{(x_0+a)^2-y_0^2}=\frac{2(x_0+a)y_0}{-2(x_0+a)(x_0-2a)}=\frac{-y_0}{x_0-c}$.

因此，$\tan 2\angle BAF=\tan\angle BFA$，即 $\angle BFA=2\angle BAF$.

当 $x_0=c$ 时，由已知得 $\angle BFA=2\angle BAF$.

综上，$\angle BFA=2\angle BAF$.

22. **解**：

(1) $f'(x)=e^x-\cos x+\sin x$；

(ⅰ) 当 $x\in(-\frac{5\pi}{4},-\frac{\pi}{2}]$ 时，$-\sin x-\cos x\geqslant 0$，故 $f(x)\geqslant 0$；

(ⅱ) 当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$-\cos x+\sin x<-1$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，而 $f(0)=0$，故 $f(x)\geqslant 0$；

(ⅲ) 当 $x=0$ 时，$f(x)=0$；

(ⅳ) 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$1+x>\cos x+\sin x$. 设 $h(x)=e^x-x-1$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)=e^x-1>0$，故 $h(x)$ 单调递增，$h(0)=0$，所以 $f(x)>h(x)>0$.

(2) 设 $k(x)=(g(x)-2-ax)'=g'(x)-a=e^x+\cos x-\sin x-a$，则 $k'(x)=f(x)$，由(1)知，当 $x\in(-\frac{5\pi}{4},+\infty)$ 时，$k'(x)\geqslant 0$，$k(x)$ 在 $(-\frac{5\pi}{4},+\infty)$ 单调递增，$k(0)=2-a$.

(ⅰ) 若 $a>2$，$k(0)<0$，$k(\ln a+1)>0$，故存在唯一 $x_0\in(0,\ln a+1)$，使得 $k(x_0)=0$. 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$k(x)<0$，$g(x)-2-ax$ 单调递减，而 $g(0)-2-a\times 0=0$，故 $g(x_0)-2-ax_0<0$；

(ⅱ) 若 $0<a<2$，$k(0)>0$，$k(-\pi)<0$，故存在唯一 $x_1\in(-\pi,0)$，使得 $k(x_1)=0$，当 $x\in(x_1,0)$ 时，$k(x)>0$，$g(x)-2-ax$ 单调递增，而 $g(0)-2-a\times 0=0$，故 $g(x_1)-2-ax_1<0$；

(ⅲ) 若 $a\leqslant 0$，$g(-\frac{\pi}{2})-2-a(-\frac{\pi}{2})<0$；

(ⅳ) 若 $a=2$，$k(x)$ 单调递增，$k(0)=0$.

当 $x\in(-\frac{5\pi}{4},0)$ 时，$k(x)<0$，$g(x)-2-2x>0$；

当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$g(x)-2-2x>0$；

当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$k(x)>0$，$g(0)-2-2\times 0=0$，故 $g(x)-2-2x>0$.

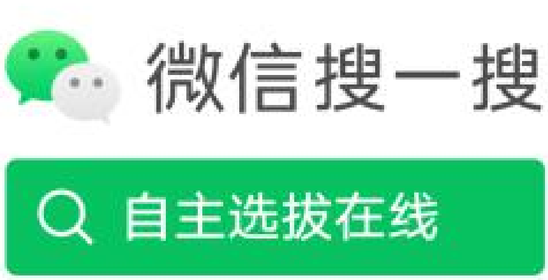
综上 $a=2$.

800300004

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》