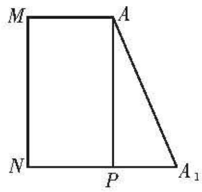
高一数学考试参考答案

1. A　因为向量$\overrightarrow{MN}=(a,a+4)$与$\overrightarrow{PQ}=(-5,a)$垂直，所以$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ}=-5a+a(a+4)=0$，则非零实数$a=1$.

2. A　若$f(x)=(m^2-3m-3)x^{m+2}$是幂函数，则$m^2-3m-3=1$，解得$m=4$或$m=-1$，故“$m=4$”是“$f(x)=(m^2-3m-3)x^{m+2}$是幂函数”的充分不必要条件.

3. B　因为$M\cap N\neq\varnothing$，所以$2a\in M$或$4-a\in M$，则$a=0,1,2,4$，经检验当$a=0$或$a=2$时，不满足集合中元素的互异性，所以a的可能取值为$1,4$，共2个.

4. D　设上、下底面的中心分别为M,N，如图，过A作$AP\perp A_1N$，



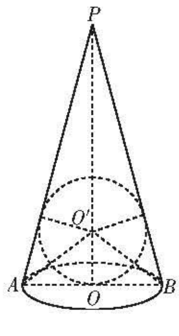
垂足为P，则$AP=MN=\sqrt{10-(3-2)^2}=3$，

故该棱台的体积$V=\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}S_{下}})h=\frac{1}{3}(\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times6+\frac{\sqrt{3}}{4}\times3^2\times6+\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times3^2\times6})\times3=\frac{1}{3}(6\sqrt{3}+\frac{27\sqrt{3}}{2}+9\sqrt{3})\times3=\frac{57\sqrt{3}}{2}$.

5. C　当原数据的平均数为m时，新数据的平均数等于原数据的平均数.
不妨设$x_1<x_2<\cdots<x_7$，则$m=x_4$，则新数据为x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7，
因为$6\times0.6=3.6$，所以新数据的60%分位数为x_5，因为$x_5>x_4$，所以新数据的60%分位数一定大于m.

6. B　由题意得$P(AB)=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$. 因为$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=60$，所以$P(A\cup B)=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$，$A$与$B$不互斥. 因为$P(A)=\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$，所以$P(AB)=P(A)P(B)$，所以$A$与$B$相互独立.

7. A　由题意得该圆锥的母线长为4，设圆锥的底面半径为R，高为h，由$2\pi R=4\times\frac{\pi}{2}$，得$R=1$，则$h=\sqrt{l^2-R^2}=\sqrt{15}$，所以该圆锥的表面积为$\pi R^2+\pi Rl=5\pi$. 如图，圆锥$PO$内切球的半径等于$\triangle PAB$内切圆的半径，设$\triangle PAB$的内切圆为圆$O'$，其半径为$r$，由$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAO'}+S_{\triangle PBO'}+S_{\triangle ABO'}$，得$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{15}=\frac{1}{2}\times4r+\frac{1}{2}\times4r+\frac{1}{2}\times2r$，得$r=\frac{\sqrt{15}}{5}$，故能制作的零件表面积的最大值为$4\pi r^2=\frac{12\pi}{5}$.



8. A　因为$f(x)=\log_{0.2}(x^2-x+1)$，所以$f(x)=f(1-x)$，且$f(x)$在$(\frac{1}{2},+\infty)$上单调递减.

因为$a=\log_2 3>1$，$\frac{1}{2}<b=\log_3 2<1$，$b+c=\log_3 2\sqrt{2}<\log_3 3=1$，$c>0$，

所以$f(a)<f(c)<f(b)$.

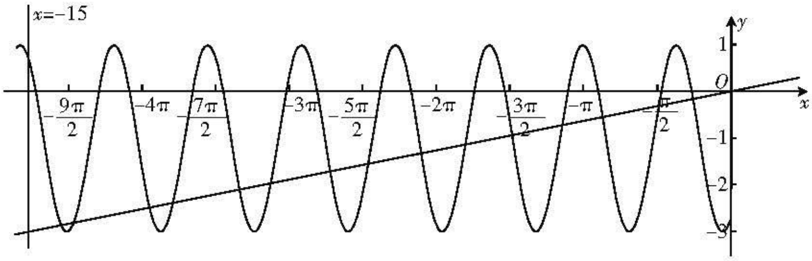
9. AD　因为一元二次不等式$(x+a)(x-\frac{5}{a})\leqslant 0(a>0)$的解集为$[-a,\frac{5}{a}]$,所以$l=\frac{5}{a}-(-a)$ $=a+\frac{5}{a}$. 当$a=1$时,$l=6$. 因为$a>0$,所以$l=a+\frac{5}{a}\geqslant 2\sqrt{5}$(当且仅当$a=\sqrt{5}$时,等号成立),所以$l$的最小值为$2\sqrt{5}$.

10. ABD　过点P只能作一个平面与α平行,过点P可以作无数条直线与α平行,过点P只能作一条直线与α垂直,过点P可以作无数个平面与α垂直.

11. BCD　依题意可得$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{5}{6}-(-\frac{7}{6})=2$,$\omega=\pi$,A错误.

由$\pi\times\frac{5}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,得$\varphi=-\frac{\pi}{3}$,B正确.

所以$f(x)=2\sin(\pi x-\frac{\pi}{3})-1$,将$f(x)$的图象向左平移$\frac{5}{6}$个单位长度得到$g(x)=2\sin[\pi(x+\frac{5}{6})-\frac{\pi}{3}]-1=2\sin(\pi x+\frac{\pi}{2})-1=2\cos\pi x-1$的图象,且$g(x)$为偶函数,C正确. 令$\frac{1}{5}x=-3$,得$x=-15$,在同一直角坐标系中,作出$f(x)$与$y=\frac{1}{5}x$在$(-15,0)$上的图象,如下图所示.



由图可知,$f(x)$与$y=\frac{1}{5}x$在$(-15,0)$上的图象共有15个交点,则方程$f(x)=\frac{1}{5}x$在$(-\infty,0)$上有15个实根,D正确.

12. BCD　因为$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{CO}=\lambda\overrightarrow{CB}$. 又因为$O$为$\triangle ABC$的外心,所以$\triangle ABC$为直角三角形且$AB\perp AC$,$O$为斜边$BC$的中点,过$A$作$BC$的垂线$AQ$,垂足为$Q$. 因为$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{BC}$上的投影向量为$\mu\overrightarrow{BC}$,所以$\overrightarrow{OA}$在$\overrightarrow{BC}$上的投影向量为$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BO}=\mu\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=(\mu-\frac{1}{2})\overrightarrow{BC}$. 当$\mu=\frac{1}{2}$时,$\cos\angle AOC=0$,$\mu\cdot\cos\angle AOC=0$;当$\frac{1}{2}<\mu<1$时,如图1,$\cos\angle AOC=\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\frac{(\mu-\frac{1}{2})|\overrightarrow{BC}|}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|}=2\mu-1$;当$0<\mu<\frac{1}{2}$时,如图2,$\cos\angle AOC=-\cos\angle AOQ=-\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\frac{|\mu-\frac{1}{2}||\overrightarrow{BC}|}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|}=2\mu-1$.

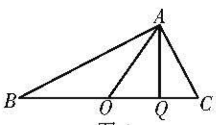


图1

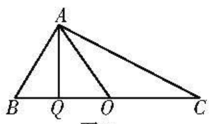


图2

所以 $\mu\cdot\cos\angle AOC=2\mu^2-\mu=2(\mu-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{8}$，因为 $\mu\in(0,1)$，所以当 $\mu=\frac{1}{4}$ 时，$\mu\cdot\cos\angle AOC$ 取得最小值，且最小值为 $-\frac{1}{8}$.

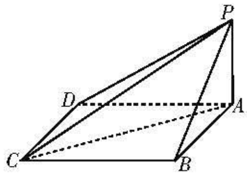
当 $\mu=0$ 时，$2\mu^2-\mu=0$，当 $\mu=1$ 时，$2\mu^2-\mu=1$.

故 $\mu\cdot\cos\angle AOC$ 的取值范围是 $[-\frac{1}{8},1)$.

13. $(\frac{3}{5},\frac{1}{5})$；1　$z=\frac{(1+i)^2}{1+3i}=\frac{2i}{1+3i}=\frac{2i(1-3i)}{10}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$，$|i+z|=|\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i|=1$.

14. $\frac{7}{18}$　A 中的元素为 0，1，2，…，17，共 18 个，质数有 2，3，5，7，11，13，17，共 7 个，故所求概率为 $\frac{7}{18}$.

15. $\frac{3\pi}{4}$　如图，连接 AC，因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $\angle PCA$ 为 PC 与底面 $ABCD$ 所成的角，则 $\angle PCA=\frac{\pi}{6}$，所以 $AC=\sqrt{3}PA$. 又 $AD=\sqrt{2}PA$，在矩形 $ABCD$ 中，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=PA$，则 $AB=CD=PA$，所以 $\angle PBA=\frac{\pi}{4}$. 因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PA\perp BC$，又 $AB\perp BC$，$AB\cap PA=A$，所以 $BC\perp$ 平面 PAB，所以 $BC\perp PB$，所以顶点 B 的曲率为 $2\pi-(\frac{\pi}{2}\times2+\frac{\pi}{4})=\frac{3\pi}{4}$.



16. 2112　记 1 号门的位置为 A，4 号门的位置为 B，8 号门的位置为 C，则根据条件可得 $\angle B=180°-(90°-53°48'+75°48')=68°$，$\angle C=(90°-63°18')-(90°-75°48')=12°30'$.

由 $\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{AC}{\sin\angle B}$，得 $AC=\frac{492\times\sin 68°}{\sin 12°30'}=\frac{492\times0.927}{0.216}=2111.5\approx2112$ m.

17. (1)证明：$\because A_1B_1^2+B_1C_1^2=A_1C_1^2$，$\therefore A_1B_1\perp B_1C_1$. ………… 2 分

又 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，$\therefore BB_1\perp A_1B_1$. ………… 3 分

$\because B_1C_1\cap BB_1=B_1$，$\therefore A_1B_1\perp$ 平面 BB_1C_1P. ………… 5 分

(2)解：$\because BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，$\therefore BB_1\perp B_1C_1$. ………… 6 分

$\because BB_1/\!/CC_1$，$\therefore$ 四边形 BB_1C_1P 为梯形. ………… 7 分

设 $C_1P=x$，则 $BB_1=CC_1=2x$，

由(1)知 $V_{A_1-BB_1C_1P}=\frac{1}{3}A_1B_1\times\frac{1}{2}\times(x+2x)\times B_1C_1=6x=12$，………… 9 分

解得 $x=2$，则 $BB_1=2x=4$. ………… 10 分

18. 解：(1)在 $\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$，因为 $A+B=5C$，所以 $C=\frac{\pi}{6}$，………… 1 分

由 $\sin(A-C)=2\sin B$，得 $\sin(A-\frac{\pi}{6})=2\sin(\frac{5\pi}{6}-A)$，………… 2 分

即 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A-\frac{1}{2}\cos A=2(\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A)$，………… 4 分

则 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=-\sqrt{3}$, ………………………………………………………… 5 分

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………………………… 6 分

(2)在 $\triangle ACD$ 中,由余弦定理得 $CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos A$, ……………… 8 分

即 $19=9+AD^2+3AD$,解得 $AD=2$($AD=-5$ 舍去), ……………………………………… 10 分

所以 $\triangle ACD$ 的面积为 $\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin A=\frac{1}{2}\times3\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ………………… 12 分

19.解:(1)由 $10a=1-(0.020+0.025+0.015+0.005)\times10$,解得 $a=0.035$,则 $n=\frac{7}{10a}=20$.

………………………………………………………………………………………… 4 分

(2)若各区间的值以该区间的中点值作代表,则上述网民年龄的平均值的估计值为 $15\times0.2+25\times0.25+35\times0.35+45\times0.15+55\times0.05=31$, ……………………………… 8 分

方差的估计值为 $0.2\times(15-31)^2+0.25\times(25-31)^2+0.35\times(35-31)^2+0.15\times(45-31)^2+0.05\times(55-31)^2=124$. ……………………………………………………… 12 分

20.解:(1)设事件 D 为李明第一环节抽中 A 题,且第一环节通过面试.

由题意得李明第一环节抽到每道题目的概率均为 $\frac{1}{3}$, ……………………………… 2 分

所以 $P(D)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$. ………………………………………………………… 4 分

(2)方法一:设事件 E 为李明第一环节通过面试,

则 $P(E)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{13}{36}$. ………………………………………… 7 分

设事件 F 为李明面试失败,李明答题情况如下:A 题错 B 题错 C 题错,A 题错 C 题错 B 题错,B 题错 A 题错 C 题错,B 题错 C 题错 A 题错,C 题错 A 题错 B 题错,C 题错 B 题错 A 题错.

所以 $P(F)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$. ……………………………………… 10 分

故李明第二环节或第三环节通过面试的概率为 $1-P(E)-P(F)=\frac{7}{18}$. ……………… 12 分

方法二:设事件 E 为李明第二环节通过面试,李明答题情况如下:A 题错 B 题对,A 题错 C 题对,B 题错 A 题对,B 题错 C 题对,C 题错 A 题对,C 题错 B 题对.

所以 $P(E)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3})=\frac{17}{72}$. ……

………………………………………………………………………………………… 7 分

设事件 F 为李明第三环节通过面试,李明答题情况如下:A 题错 B 题错 C 题对,B 题错 A 题错 C 题对,A 题错 C 题错 B 题对,C 题错 A 题错 B 题对,B 题错 C 题错 A 题对,C 题错 B 题错 A 题对.

所以 $P(F)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2})=\frac{11}{72}$. … 10 分

故李明第二环节或第三环节通过面试的概率为 $P(E)+P(F)=\frac{7}{18}$. …………………… 12 分

21. 解:(1)依题意可得方程 $1-\log_2(ax+1)=0$ 在 $[1,2]$ 内只有一个实数解, …………… 1 分

即 $ax=1$ 在 $[1,2]$ 内只有一个实数解, …………………………………………………… 2 分

则 $a=\frac{1}{x}\in[\frac{1}{2},1]$, ……………………………………………………………… 4 分

所以 a 的取值范围为 $[\frac{1}{2},1]$. …………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $f(x)=\frac{1}{4}\lg x$,所以当 $t_2\in[\frac{1}{10},10]$ 时,$f(t_2)\in[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$, …………………… 6 分

则 $D[f(t_2)]=\frac{1}{4}-(-\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$. ……………………………………………………… 7 分

因为 $a=2$,所以 $\varphi(x)=g(x)-\log_2 x=\log_2\frac{2x+1}{x}=\log_2(2+\frac{1}{x})$ 在 $[1,t_1]$ 上为减函数, …

……………………………………………………………………………………………… 8 分

所以 $\varphi(x)$ 在 $[1,t_1]$ 上的最大值为 $\varphi(1)=\log_2 3$,最小值为 $\varphi(t_1)=\log_2(2+\frac{1}{t_1})$, ……… 9 分

所以当 $x\in[1,t_1]$ 时,$D[\varphi(x)]=\log_2 3-\log_2(2+\frac{1}{t_1})=\log_2\frac{3t_1}{2t_1+1}$, ………………… 10 分

由 $D[\varphi(x)]>D[f(t_2)]$,得 $\log_2\frac{3t_1}{2t_1+1}>\frac{1}{2}$,即 $\frac{3t_1}{2t_1+1}>\sqrt{2}$, ………………………… 11 分

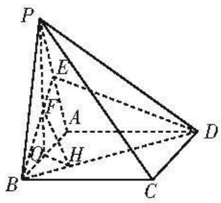
解得 $t_1>4+3\sqrt{2}$,故 t_1 的取值范围为 $(4+3\sqrt{2},+\infty)$. ……………………………… 12 分

22. (1)证明:因为底面 $ABCD$ 是正方形,所以 $AB/\!/CD$. ………………………………… 1 分

因为 $AB\subset$ 平面 PAB,$CD\not\subset$ 平面 PAB,所以 $CD/\!/$ 平面 PAB. ……………………… 3 分

由平面 $PAB\cap$ 平面 $PCD=l$,$CD\subset$ 平面 PCD,得 $l/\!/CD$. ……………………………… 5 分

(2)解:法一:取 AB 的中点 O,连接 PO,交 BE 于点 F,



过点 O 作 OH 垂直于 BD,垂足为 H,连接 HF.

由底面 $ABCD$ 是正方形,且 $AD=2$,$PA=2$,$\angle PAB=60°$,

得 $\triangle PAB$ 是等边三角形,所以 $PO\perp AB$. …………………………………… 6 分

因为 $AD=2$,$PA=2$,$PD=2\sqrt{2}$,

所以 $AD\perp PA$, ………………………………………………………………………………… 7 分

因为 $AB\cap PA=A$,所以 $AD\perp$ 平面 PAB,所以 $AD\perp PO$.

因为 $AB\cap AD=A$,所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $FO\perp BD$. ……………………………… 8 分

因为 $OF\cap OH=O$,所以 $BD\perp$ 平面 OFH,所以 $BD\perp FH$, ……………………………… 9 分

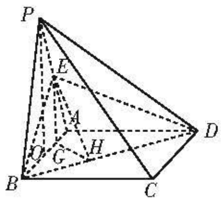
所以 $\angle OHF$ 为二面角 $E-BD-A$ 的平面角. ……………………………………………… 10 分

因为 $\triangle BOH$ 与 $\triangle BDA$ 相似,所以 $\frac{BO}{BD}=\frac{OH}{AD}$,即 $\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{OH}{2}$,$\frac{\sqrt{2}}{2}=OH$.

因为 $\tan\angle OHF=\frac{OF}{OH}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $OF=\frac{\sqrt{3}}{3}$. …………………………………………… 11 分

因为 $PO=\sqrt{3}$，所以 F 为 $\triangle PAB$ 的中心，所以 E 为 PA 的中点，所以 $\lambda=2$. ………… 12 分

法二：取 AB 的中点 O，连接 PO，



过点 E 作 EG 垂直于 AB，垂足为 G.

过点 G 作 GH 垂直于 BD，垂足为 H，连接 HE.

由底面 $ABCD$ 是正方形，且 $AD=2$，$PA=2$，$\angle PAB=60^\circ$，

得 $\triangle PAB$ 是等边三角形，所以 $PO\perp AB$. ……………………………… 6 分

因为 $AD=2$，$PA=2$，$PD=2\sqrt{2}$，所以 $AD\perp PA$，………………………………………………… 7 分

因为 $AB\cap PA=A$，所以 $AD\perp$ 平面 PAB，所以 $AD\perp PO$.

因为 $AB\cap AD=A$，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $EG\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………………………………………… 8 分

因为 $EG\cap GH=G$，所以 $BD\perp$ 平面 EGH，所以 $BD\perp EH$，……………………………… 9 分

所以 $\angle EHG$ 为二面角 $E-BD-A$ 的平面角. ……………………………………………… 10 分

由 $EG/\!/PO$，得 $\dfrac{EA}{PA}=\dfrac{EG}{PO}=\dfrac{GA}{OA}$，$EG=\dfrac{1}{\lambda}PO=\dfrac{\sqrt{3}}{\lambda}$，$GA=\dfrac{1}{\lambda}OA=\dfrac{1}{\lambda}$，$BG=2-\dfrac{1}{\lambda}$，

$GH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BG=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(2-\dfrac{1}{\lambda})$，……………………………………………………………… 11 分

由 $\tan\angle EHG=\dfrac{EG}{GH}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，解得 $\lambda=2$. ……………………………………………………… 12 分