高三二轮检测

数学试题参考答案及评分标准

2023.04

一、选择题：

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	C	A	C	B	C	D	D	B

二、选择题：

题　号	9	10	11	12
答　案	AC	ACD	BD	BCD

三、填空题：

13. 312　　14. $-\frac{1}{3}$　　15. 20　　16. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

四、解答题：

17. (10分)

解：(1)方法一：

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得，

$9=4+c^2-4c\times(-\frac{1}{3})$

即$c^2+\frac{4}{3}c-5=0$

解得$c=-3$(舍)或$c=\frac{5}{3}$ ………………………………………… 3分

$\because \cos B=-\frac{1}{3}, B\in(0,\pi)$

$\therefore \sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

由正弦定理得，$\sin C=\frac{\frac{5}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}}{3}=\frac{10\sqrt{2}}{27}$ ………………………… 5分

方法二：

$\triangle ABC$中，$\cos B=-\frac{1}{3}$

$\therefore \sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

由正弦定理得，$\sin A=\dfrac{2\times\frac{2}{3}\sqrt{2}}{3}=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ ………………………… 3分

$\therefore \cos A=\dfrac{7}{9}$

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\times(-\dfrac{1}{3})+\dfrac{7}{9}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{10\sqrt{2}}{27}$ ……………… 5分

(2) 连接CD

$\because \angle ABD=\angle CBD$

$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$

$\therefore AD=CD$ ………………………………………… 7分

又$\angle ABC+\angle ADC=\pi$,

$\therefore \cos\angle ADC=\dfrac{1}{3}$,

设$AD=CD=m(m>0)$

在$\triangle ACD$中，由余弦定理得，

$9=m^2+m^2-2m^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}m^2$, ………………………………………… 9分

$\therefore m^2=\dfrac{27}{4}$

$\therefore m=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore AD=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………… 10分

18.（12分）

解：(1) $\because$ $\triangle PBC$为等边三角形，D为PC中点

$\therefore BD\perp PC$

又$\because BD\perp PA, PA\cap PC=P, PA, PC\subset$平面$PAC$

$\therefore BD\perp$平面PAC ………………………………………… 2分

$\because AC\subset$平面PAC

$\therefore AC\perp BD$

取BC中点G，连接PG

$\because$ $\triangle PBC$为等边三角形

$\therefore PG\perp BC$

$\because$ 平面$PBC\perp$平面ABC，平面$PBC\cap$平面$ABC=BC$，$PG\subset$平面PBC

$\therefore PG\perp$平面ABC ………………………………………… 4分

$\because AC\subset$平面ABC

$\therefore PG\perp AC$

$\because BD$与PG相交，$BD, PG\subset$平面PBC

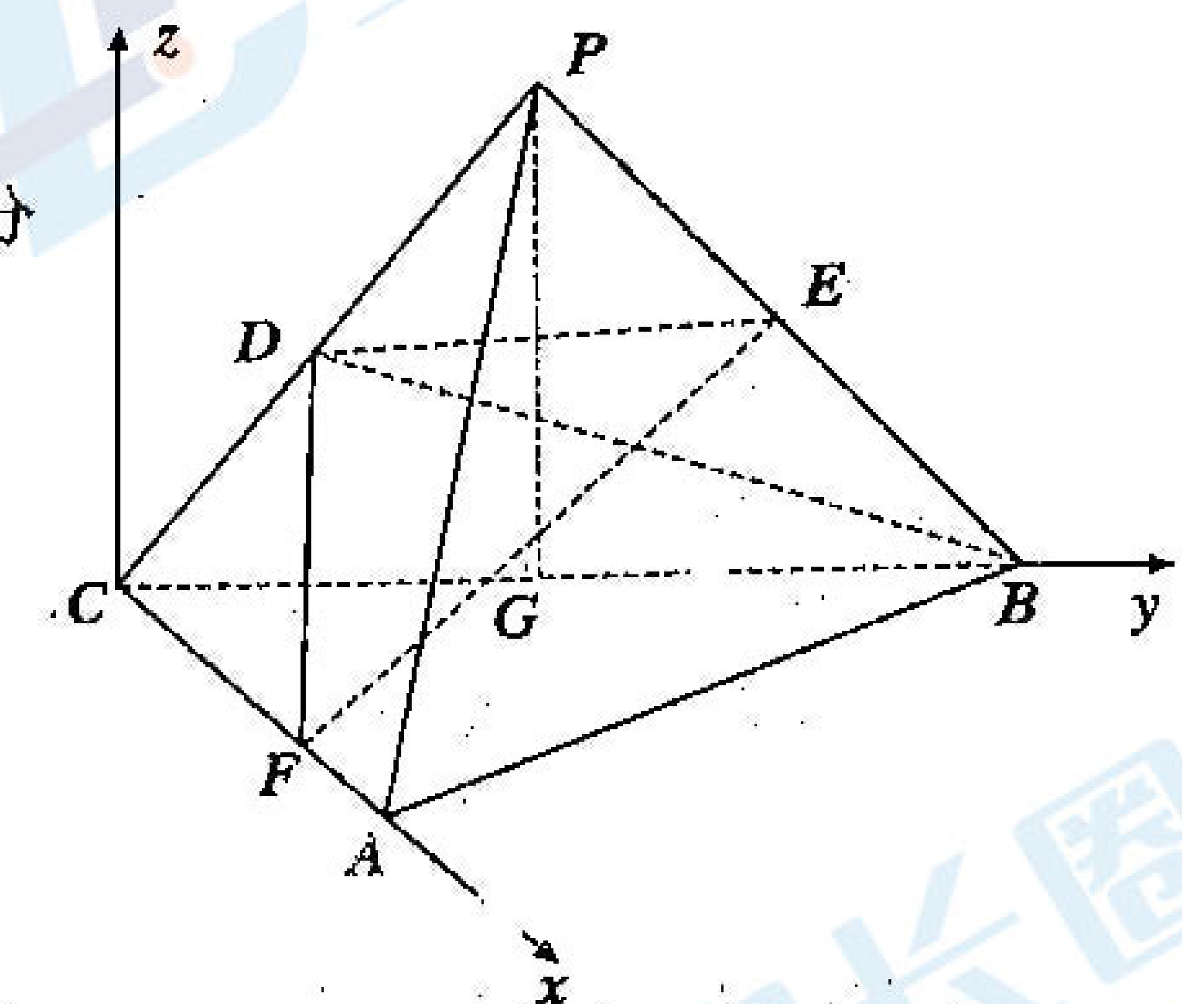
$\therefore AC\perp$平面PBC ………………………………………… 6分

(2)以 C 为坐标原点，CA,CB 所在直线为 x轴,y轴,过C且与GP平行的直线为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系，则

$C(0,0,0),B(0,2,0),P(0,1,\sqrt{3}),D(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),E(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

设 $F(a,0,0)(0\leqslant a\leqslant 1)$,则

$\overrightarrow{DE}=(0,1,0),\overrightarrow{DF}=(a,-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ … 8分



设面 DEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=0\\ ax-\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$

取 $x=\sqrt{3}$,解得 $\begin{cases}y=0\\ z=2a,\end{cases}$

$\therefore \boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,2a)$ ························ 10分

取平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$,则

$\cos\langle \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\rangle=\frac{2a}{\sqrt{3+4a^2}}=\frac{1}{2}$

解得 $a=\frac{1}{2}$,此时 $CF=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 在线段 AC 上存在点 F 使得平面 DEF 与平面 ABC 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,且 $CF=\frac{1}{2}$

··· 12分

19.(12分)

解:(1) $\because a_na_{n+1}=4S_n$

$\therefore a_{n-1}a_n=4S_{n-1}(n\geqslant 2)$

$\therefore a_n(a_{n+1}-a_{n-1})=4a_n(n\geqslant 2)$

$\because a_n\neq 0$

$\therefore a_{n+1}-a_{n-1}=4(n\geqslant 2)$ ·· 2分

又 $a_1=2,a_1a_2=4S_1$,

$\therefore a_2=4$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的奇数项,偶数项分别是以2,4为首项,4为公差的等差数列······ 3分

当 $n=2k-1$ 时,$a_{2k-1}=4k-2=2(2k-1)$

当 $n=2k$ 时,$a_{2k}=4k=2\cdot 2k$

综上,$a_n=2n,n\in N^*$ ·· 6分

(2)方法一：

$\because b_n=(-1)^n(3^n-1)=(-3)^n-(-1)^n=(-3)^n+(-1)^{n+1}$ ………………………… 7分

$\therefore T_n=\dfrac{(-3)[1-(-3)^n]}{1-(-3)}+\dfrac{1-(-1)^n}{1-(-1)}$

$=\dfrac{3(-3)^n-3}{4}+\dfrac{1-(-1)^n}{2}$

$=\dfrac{3(-3)^n-2(-1)^n-1}{4}$ ………………………………………………………… 9分

$\therefore T_{2k}=\dfrac{3(9^k-1)}{4},T_{2k-1}=\dfrac{1}{4}(1-9^k)$

$\because \forall k\in N^*,T_{2k}\geqslant T_2=6,T_{2k-1}\leqslant T_1=-2$

$\therefore \lambda\in(-2,6)$ ……………………………………………………………………… 12分

(2)方法二：$\because b_n=(-1)^n(3^n-1)$

$b_{2k-1}+b_{2k}=-(3^{2k-1}-1)+(3^{2k}-1)=2\cdot 3^{2k-1}$ ……………………………… 8分

$\therefore T_{2k}=2\cdot 3^1+2\cdot 3^3+2\cdot 3^5+\cdots+2\cdot 3^{2k-1}=\dfrac{3(9^k-1)}{4}$

$\therefore \forall k\in N^*,T_{2k}\geqslant T_2=6$ ………………………………………………… 10分

$\therefore T_{2k-1}=T_{2k}-b_{2k}=\dfrac{3(9^k-1)}{4}-(3^{2k}-1)=\dfrac{1}{4}(1-9^k)$

$\therefore \forall k\in N^*,T_{2k-1}\leqslant T_1=-2$

$\therefore \lambda\in(-2,6)$ ……………………………………………………………………… 12分

20.(12分)

解：(1)每次摸到黑球的概率$P_1=\dfrac{2}{5}$，摸到红球的概率$P_2=\dfrac{3}{5}$ ………………………… 2分

每名学生两次摸到的球的颜色不同的概率$P_3=2\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{12}{25}$ ………… 4分

由题意知，高一五班50名学生按方式①回答问卷的人数$X\sim B(50,\dfrac{12}{25})$

$\therefore X$的数学期望$E(X)=50\times\dfrac{12}{25}=24$ ………………………………………… 6分

(2)记事件A为"按方式①回答问卷"，事件B为"按方式②回答问卷"，事件C为"在问卷中画'√'号".

由(1)知 $P(A)=\dfrac{12}{25},P(B)=1-P(A)=\dfrac{13}{25},P(A)P(C|A)=P(AC)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{25}$

……………………………………………………………………………………………… 8分

由全概率公式得，$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$

$\therefore \dfrac{1}{3}=\dfrac{6}{25}+\dfrac{13}{25}\times P(C|B)$ ……………………………………………… 10分

$\therefore P(C|B)=\dfrac{7}{39}\approx 0.18=18\%$

$\therefore$由调查问卷估计，该中学高一年级学生对互联网的依赖率约为18%.

……………………………………………………………………………………………… 12分

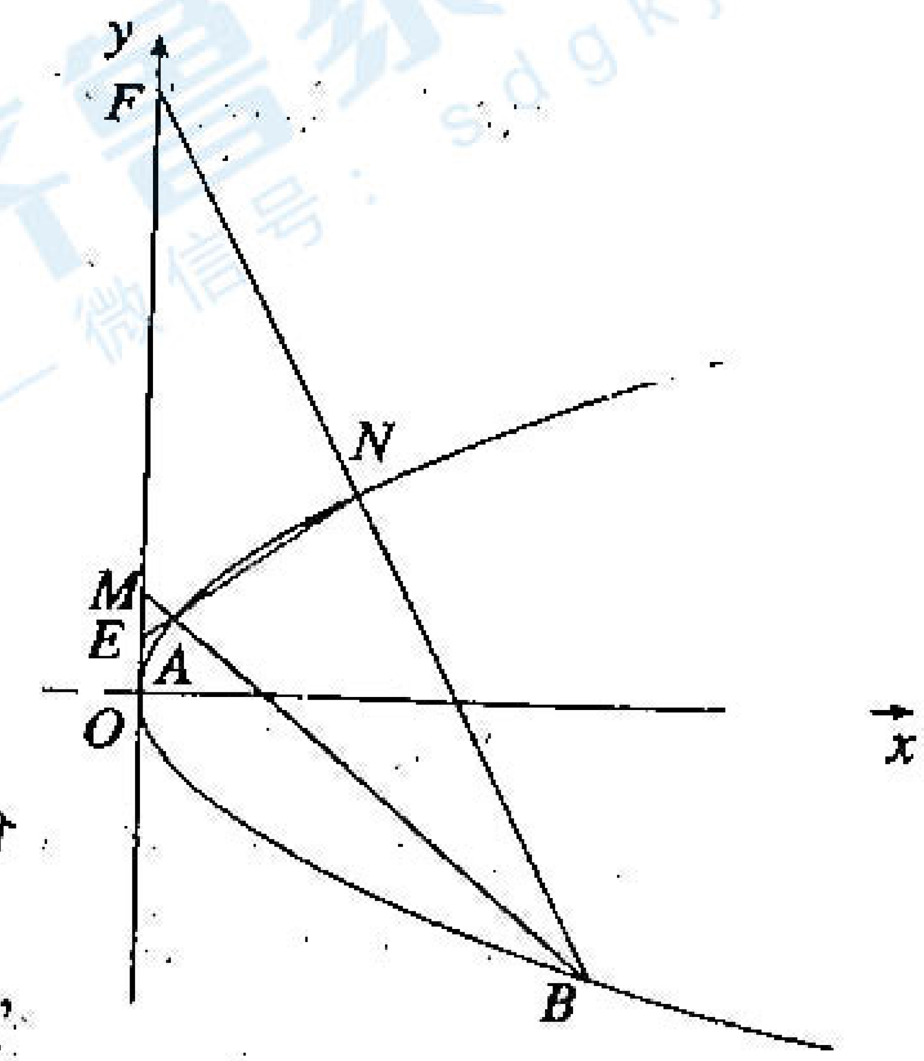
21.(12分)

解：(1) ∵ $|MN|^2 = x_0^2 + 1 = 4$

∴ $x_0^2 = 3$

∵ $x_0 > 0$

∴ $x_0 = \sqrt{3}$



将 $(\sqrt{3}, 2)$ 代入 $y^2 = 2px$，解得 $p = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

∴ 抛物线C的方程为 $y^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}x$ ……………… 2分

∵ 直线l过点$M(0,1)$，且与抛物线C有两个不同的交点，

∴ 直线l的斜率存在且不为0，设直线l的方程为 $y = kx + 1 (k \neq 0)$

由 $\begin{cases} y^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}x \\ y = kx + 1 \end{cases}$ 得，$k^2x^2 + (2k - \frac{4\sqrt{3}}{3})x + 1 = 0$ ………………………… 4分

∴ $k \neq 0$ 且 $\Delta = (2k - \frac{4\sqrt{3}}{3})^2 - 4k^2 > 0$ 即 $16 - 16\sqrt{3}k > 0$

∴ $k < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 且 $k \neq 0$

∵ $\overrightarrow{OM} = \lambda(\overrightarrow{NE} - \overrightarrow{NM})$，$\overrightarrow{MO} = \mu(\overrightarrow{NF} - \overrightarrow{NM})$

∴ $\overrightarrow{MO} = \lambda\overrightarrow{ME}$，$\overrightarrow{MO} = \mu\overrightarrow{MF}$

∴ 点E,F均在y轴上

∴ NA,NB均与y轴相交

∴ 直线l不过点 $(\sqrt{3}, -2)$

∴ $k \neq -\sqrt{3}$

∴ k的取值范围为 $k < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 且 $k \neq 0$ 且 $k \neq -\sqrt{3}$

∴ 直线l的倾斜角的取值范围为 $(0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{2\pi}{3}, \pi)$. ……………… 6分

(2) 设 $A(\frac{\sqrt{3}}{4}y_1^2, y_1)$ $B(\frac{3}{\quad}\ y_2)$ $(y_1 \neq y_2)$

∵ M,A,B 三点共线

$$\frac{y_1 - 1}{\frac{\sqrt{3}}{4}y_1^2} = \frac{y_2 - 1}{\frac{\sqrt{3}}{4}y_2^2}$$

∴ $y_1y_2 = y_1 + y_2$. …………………………………………………………………… 7分

∵ $\overrightarrow{MO} = \lambda\overrightarrow{ME}$，$\overrightarrow{MO} = \mu\overrightarrow{MF}$

∴ $\lambda = \frac{1}{1 - y_E}$，$\mu = \frac{1}{1 - y}$ ………………………………………………………… 8分

由(1)知，$k\neq\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴ $y_1\neq 2$且$y_2\neq 2$

∴ 直线NA的方程为$y-2=\frac{y_1-2}{\frac{\sqrt{3}}{4}y_1^2-\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})$

令$x=0$得$y_E=\frac{2y_1}{y_1+2}$

同理可得，$y_F=\frac{2y_2}{y_2+2}$ …………………………………………………… 10分

$$\therefore \lambda+\mu=\frac{1}{1-y_E}+\frac{1}{1-y_F}$$

$$=\frac{2+y_1}{2-y_1}+\frac{2+y_2}{2-y_2}$$

$$=\frac{8-2y_1y_2}{4-2(y_1+y_2)+y_1y_2}=\frac{8-2y_1y_2}{4-y_1y_2}=2$$ …………………………………… 12分

22.（12分）

解：(1)方法一：

∵ $f(x)-1=me^{x-1}-\ln x-1=0$

$$\therefore m=\frac{\ln x+1}{e^{x-1}}$$

设$h(x)=\frac{\ln x+1}{e^{x-1}}$，则$h'(x)=\frac{\frac{1}{x}-1-\ln x}{e^{x-1}}$ …………………………………… 2分

设$\varphi(x)=\frac{1}{x}-1-\ln x$，则$\varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<0$

∴ $\varphi(x)$单调递减

∵ $\varphi(1)=0$

∴ 当$0<x<1$时，$\varphi(x)>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

当$x>1$时，$\varphi(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，

∴ $h(x)_{\max}=h(1)=1$

∴ 当$m=1$时，方程有一解，当$m>1$时，方程无解 ………………………… 4分

方法二：

设$h(x)=f(x)-1=me^{x-1}-\ln x-1$，则$h'(x)=me^{x-1}-\frac{1}{x}$

设$\varphi(x)=me^{x-1}-\frac{1}{x}(x>0)$，则$\varphi'(x)=me^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$

∴ $\varphi(x)$单调递增 ………………………………………………………………… 2分

当$m=1$时，$\varphi(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$，$\varphi(1)=0$

∴ 当$0<x<1$时，$\varphi(x)<0$，$h(x)$单调递减，当$x>1$时，$\varphi(x)>0$，$h(x)$单调递增

$\therefore h(x)_{\min}=h(1)=m-1=0$

$\therefore$ 方程$f(x)-1=0$有一解.

当$m>1$时,$h(x)=me^{x-1}-\ln x-1>e^{x-1}-\ln x-1\geq 0$

$\therefore h(x)=0$无解,即方程$f(x)-1=0$无解

综上,当$m=1$时,方程有一解,当$m>1$时,方程无解. ······················ 4分

(2)(i)当$m=e$时,$g(x)=e^x-\frac{t}{2}x^2-\frac{e}{2}\ (x>0)$,则$g'(x)=e^x-tx$

$\therefore x_1,x_2$是方程$e^x-tx=0$的两根

设$n(x)=\frac{e^x}{x}$,则$n'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

令$n'(x)=0$,解得$x=1$,

$\therefore n(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增

$\because n(1)=e,n(2)=\frac{e^2}{2}$

$\therefore$ 当$t\in(e,\frac{e^2}{2})$时,$0<x_1<1,1<x_2<2$

$\therefore x_1+x_2<3$. ··· 6分

由$\begin{cases}e^{x_1}=tx_1\\e^{x_2}=tx_2\end{cases}$ 得$\begin{cases}x_1=\ln t+\ln x_1\\x_2=\ln t+\ln x_2\end{cases}$

$\therefore x_2-x_1=\ln x_2-\ln x_1=\ln\frac{x_2}{x_1}$

令$p=\frac{x_2}{x_1}>1$

$\therefore x_1=\frac{\ln p}{p-1},x_2=\frac{p\ln p}{p-1}$

$\therefore x_1+x_2=\frac{\ln p}{p-1}+\frac{p\ln p}{p-1}=\frac{1+p}{p-1}\ln p$

$\therefore x_1+x_2>2$等价于$\ln p>\frac{2(p-1)}{p+1}$

设$q(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1},x\in[1,+\infty)$,则$q'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geq 0$

$\therefore q(x)$单调递增

$\therefore q(x)\geq q(1)=0$

$\therefore q(p)>0$,即$\ln p>\frac{2(p-1)}{p+1}$,

$\therefore x_1+x_2>2$

综上,$2<x_1+x_2<3$, ·· 8分

(ii)由(i)知,$e^{x_1}=tx_1,e^{x_2}=tx_2$

$\therefore g(x_1)+2g(x_2)=e^{x_1}-\frac{t}{2}x_1^2-\frac{e}{2}+2e^{x_2}-tx_2^2-e$

$=e^{x_1}-\frac{t}{2}x_1^2+2e^{x_2}-tx_2^2-\frac{3}{2}e$

$=e^{x_1}-\frac{x_1}{2}e^{x_1}+2e^{x_2}-x_2e^{x_2}-\frac{3}{2}e$

$=e^{x_1}(1-\frac{x_1}{2})+e^{x_2}(2-x_2)-\frac{3}{2}e$

由(i)知,$1<2-x_1<x_2<2$

设$s(x)=(2-x)e^x,x\in(1,2)$,则$s'(x)=(1-x)e^x<0$

$\therefore s(x)$单调递减

$\therefore s(x_2)<s(2-x_1)$,即$(2-x_2)e^{x_2}<x_1e^{2-x_1}$

$\therefore g(x_1)+2g(x_2)<e^{x_1}(1-\frac{x_1}{2})+x_1e^{2-x_1}-\frac{3}{2}e$ ………………………… 10分

设$M(x)=(1-\frac{x}{2})e^x+xe^{2-x}-\frac{3}{2}e,x\in(0,1]$,则

$M'(x)=\frac{1}{2}(1-x)e^x+(1-x)e^{2-x}$

$=(1-x)(\frac{1}{2}e^x+e^{2-x})\geq0$

$\therefore M(x)$单调递增

又$M(1)=0$,

$\therefore$ 当$x\in(0,1)$时,$M(x)<0$

$\therefore M(x_1)<0$

$\therefore g(x_1)+2g(x_2)<0$ …………………………………………………… 12分