辽宁省部分重点中学协作体 2021 年模拟考试

数学参考答案及评分标准

一、单项选择题

1. A　2. B　3. C　4. C　5. B　6. D　7. C　8. D

二、多项选择题

9. BCD　10. BC　11. ACD　12. ABD

三、填空题

13. 3　14. π；-3　15. -1或1　16. 49π

四、解答题

17.【解析】

（1）证明：连接 DF 交 AC 于 G，连接 EG，

因为 $ABCD$ 是正方形，且 F 为 BC 中点，

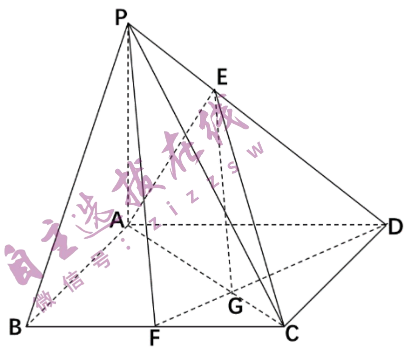
所以 $\dfrac{DG}{GF}=\dfrac{AD}{FC}=2$，即 $DG=2GF$，　………2 分

又因为 $DE=2PE$，

所以 $\dfrac{DG}{GF}=\dfrac{DE}{PE}=2$，所以 $EG \parallel PF$，　……4 分

又 $PF \not\subset$ 平面 ACE， $EG \subset$ 平面 ACE

所以 $PF \parallel$ 平面 ACE．………………………5 分



（2）以 A 为坐标原点， AB, AD, AP 分别

为 x, y, z 轴正方向建立空间直角坐标系，

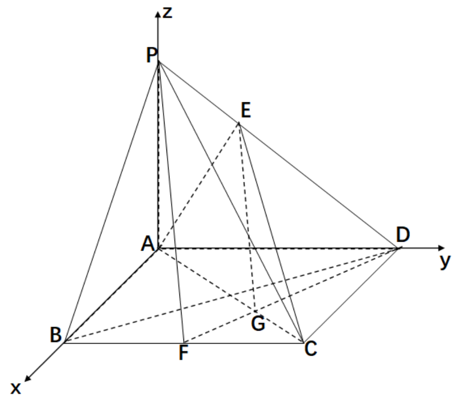
由于 $PA=AB$，不妨设 $PA=AB=1$，

则 $B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0), P(0,0,1)$

连接 BD，则 $AC \perp BD$

又因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA \perp BD$

因为 $PA \cap AC = A$，所以 $BD \perp$ 平面 PAC



所以平面 PAC 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，……………………………………7 分

设平面 PBC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，又因为 $\overrightarrow{BP}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BP}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x+z=0\\ y=0\end{cases}$，取 $\overrightarrow{n_2}=(1,0,1)$，……………………………8 分

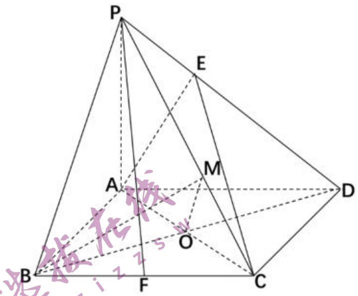
所以 $\left|\cos<\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

因为二面角 $B-PC-A$ 的大小为锐角，所以二面角 $B-PC-A$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$．……10 分

法二：几何法

解：由于 $PA=AB$，不妨设 $PA=AB=1$，连接 BD 交 AC 于 O，

过 O 作 $OM\perp PC$ 交 PC 于点 M，连结 BM



因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BD$

因为正方形 $ABCD$，所以 $AC\perp BD$

又因为 $PA\cap AC=A$，所以 $BD\perp$ 平面 PAC ………6 分

所以 $BD\perp PC$，因为 $OM\perp PC$，

又 $OM\cap BD=O$，所以 $PC\perp$ 平面 BOM ………7 分

所以 $PC\perp BM$，又因为 $PC\perp OM$

所以 $\angle BMO$ 为所求二面角 $B-PC-A$ 的大小 ……………………………………8 分

易知 $OC=OB=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$PC=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$

因为 $\angle OMC=PAC=\dfrac{\pi}{2},\angle MCO=\angle PCA$，所以 $\Delta MOC\sim\Delta PAC$

所以 $\dfrac{OM}{PA}=\dfrac{OC}{PC}$，解得 $OM=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ……………………………10 分

因为 $OB\perp$ 平面 PAC，所以 $OB\perp OM$，在直角三角形 BOM 中，

$\tan\angle BMO=\dfrac{OB}{OM}=\sqrt{3}$，因为 $\angle BMO\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\angle BMO=\dfrac{\pi}{3}$ ……11 分

所以二面角 $B-PC-A$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$ ………………………… 12 分

18.【解析】

（1）当$n=1$时，$2S_1=a_1^2+a_1$，因为$a_1\neq 0$，所以$a_1=1$………………………… 2 分

当$n=2$时，$2S_2=2(a_1+a_2)=a_2^2+a_2$，解得：$a_2=-1$或$a_2=2$

注：少一个解扣一分 ……………………………………………………………4 分

（2）当$n\geq 2$时，$2a_n=2(S_n-S_{n-1})=a_n^2+a_n-(a_{n-1}^2+a_{n-1})$，

化简得：$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$ （$n\geq 2$）

所以$a_n=-a_{n-1}$或$a_n-a_{n-1}=1$ （$n\geq 2$） ………………………………… 9 分

又$a_1=1$，$a_{2021}=-2020$，$a_n\neq 0$，所以存在如下形式的通项满足数列$\{a_n\}$的条件：

$$a_n=\begin{cases} n & (1\leq n\leq 2020) \\ (-1)^n 2020 & (n\geq 2021) \end{cases}$$ ………………………………… 12 分

19.【解析】

（1）因为$C=2A$，所以$\sin C=2\sin A\cos A$，即：$c=2a\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ………2 分

将$b=1$，$c=\sqrt{2}$代入得$a^3-3a+2=0$，化简得$(a-1)^2(a+2)=0$，

因为$a>0$，所以$a=1$ ………………………………………………5 分

（2）由（1）可知ΔABC为等腰直角三角形，所以$C=\dfrac{\pi}{2}$，

设$\angle MAC=\alpha$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，则$\angle MCA=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}$，$\angle MCB=\dfrac{\alpha}{2}$，

取BC中点D，则$MD\perp BC$，所以$MC=\dfrac{1}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$， ………………………………7 分

又$AM=AC=1$，在ΔAMC中，由正弦定理可得：$\dfrac{\dfrac{1}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{\sin(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2})}$，…9 分

化简得 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，因为 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{4})$，即 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，

所以 $\angle MAB=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$ ································12 分

20.【解析】

（1）由题意可知：$20b=10a+0.45$，$(2a+b+0.065)\times10=1$

解得 $a=0.005$，$b=0.025$，··2 分

所以平均值等于 $50\times0.05+60\times0.25+70\times0.45+80\times0.2+90\times0.05=69.5$ ······3 分

中位数等于 $65+\frac{0.2}{0.45}\times10=\frac{625}{9}\approx69.4$ ··4 分

（2）补全 2×2 列联表： ································5 分

	男生	女生	总计
希望去张家口赛区	10	20	30
不希望去张家口赛区	30	20	50
总计	40	40	80

$\chi^2=\frac{80\times(10\times20-20\times30)^2}{40\times40\times30\times50}\approx5.333>3.841$， ································7 分

所以有 95%的把握认为希望参加张家口赛区志愿者服务的候选人与性别有关. ······8 分

（3） X 可能取值为 $2,3,4$

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_3^3}{C_7^5}=\frac{2}{7}$，$P(X=3)=\frac{C_4^3C_3^2}{C_7^5}=\frac{4}{7}$，$P(X=4)=\frac{C_4^4C_3^1}{C_7^5}=\frac{1}{7}$， ···10 分

所以 X 的分布列为：

X	2	3	4
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

所以数学期望 $E(X)=2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{4}{7}+4\times\frac{1}{7}=\frac{20}{7}$. ································12 分

21.【解析】

（1）设$Q(x,y)$，由题意得$k_{QM}\cdot k_{QN}=\frac{y}{x-3}\cdot\frac{y}{x+3}=-\frac{4}{9}$

化简得$C_1:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1(x\neq\pm3)$　　**注：没写$x\neq\pm3$（或$y\neq0$）扣一分**……4 分

（2）设点P的坐标为$P(x_0,y_0)$，由题意可知$\frac{x_0{}^2}{15}+\frac{y_0{}^2}{10}=1$ ①，

因为$0<x_0<3$，所以过点P作C_1切线的斜率显然存在，设直线的斜率为为k，

即$y=kx+(y_0-kx_0)$. 将该直线方程与C_1联立：$\begin{cases}y=kx+(y_0-kx_0)\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 得：

$(9k^2+4)x^2+18k(y_0-kx_0)x+[9(y_0-kx_0)^2-36]=0$，　　……………………6 分

令$\Delta=0$，整理得$(x_0{}^2-9)k^2-2x_0y_0k+(y_0{}^2-4)=0$ ②.　　……………………8 分

由题意知k_1，k_2是方程②的两根，$\because x_0{}^2-9\neq0$，且由韦达定理，知$k_1\cdot k_2=\frac{y_0{}^2-4}{x_0{}^2-9}$ ③.

将①代入③即得$k_1\cdot k_2=-\frac{2}{3}$， ④　　……………………………………10 分

由$\angle PED=2\angle PDE$，结合题意可知：$k_1=\tan\angle PDE$，$k_2=-\tan\angle PED$

所以$k_2=-\tan2\angle PDE=-\frac{2k_1}{1-k_1^2}$ ⑤　　……………………………………11 分

由④⑤并结合点P的位置解得：$k_1=\frac{1}{2}$，$k_2=-\frac{4}{3}$，经检验符合题意.　………12 分

注：没写“经检验符合题意 ”不扣分

22.【解析】

（1）若$a=0$，$f(x)=2e^x-x$，即证：$2e^x-x\geq2+x+x^2$，

只需证：$e^x \geq 1+x+\dfrac{1}{2}x^2$，设 $g(x)=e^x-1-x-\dfrac{1}{2}x^2\ (x\geq 0)$， 则 $g'(x)=e^x-x-1$，

设 $h(x)=e^x-x-1$，则 $h'(x)=e^x-1\ (x\geq 0)$，显然 $h'(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上单调递增，

即 $h'(x)\geq h'(0)=0$，即 $h(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)\geq h(0)=0$ ……2 分

即 $g'(x)\geq 0$，所以 $g(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上单调递增，即 $g(x)\geq g(0)=0$，

所以 $f(x)\geqslant 2+x+x^2$ ……4 分

（2）令 $\varphi(x)=2\mathrm{e}^{x-a}-(a+1)x-2\sqrt{x^2+(a+1)x+1}$，

对于 $\forall x\in[0,+\infty)$，$\varphi(x)\geq 0$ 恒成立，则 $\varphi(0)=2e^{-a}-2\geq 0$，解得 $a\leq 0$，……5 分

又因为 $x^2+(a+1)x+1\geq 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，

因为 $x=0$ 显然成立，所以 $-(a+1)\leq x+\dfrac{1}{x}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $-(a+1)\leq 2$，

解得 $a\geq -3$，故 $-3\leq a\leq 0$， ……6 分

下面证明：当 $-3\leq a\leq 0$ 时，$\varphi(x)\geq 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立

令 $t(a)=2\mathrm{e}^{x-a}-(a+1)x-2\sqrt{x^2+(a+1)x+1}$，$a\in[-3,0]$

显然 $t(a)$ 在 $a\in[-3,0]$ 单调递减；

（事实上 $t'(a)=-2\mathrm{e}^{x-a}-x-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+(a+1)x+1}}$，因为 $x\geq 0$，所以 $t'(a)<0$），

则 $t(a)\geq t(0)=2e^x-x-2\sqrt{x^2+x+1}$， ……9 分

由（1）问可知，$e^x\geq 1+x+\dfrac{1}{2}x^2$，

所以 $2e^x-x-2\sqrt{x^2+x+1}\geq 2(1+x+\dfrac{1}{2}x^2)-x-2\sqrt{x^2+x+1}=(\sqrt{x^2+x+1}-1)^2\geq 0$

当且仅当 $x=0$ 时取等，故 $\varphi(x)\geq 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立.

综上：$-3\leq a\leq 0$ ……12 分