

北京市东城区 2020—2021 学年度第二学期高三综合练习(二)

数 学

2021.5

本试卷共 6 页,150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合  $A = \{x | 1 < x \leq 2\}$ , 那么  $\complement_{\mathbb{R}} A =$

- (A)  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$  (B)  $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$   
(C)  $(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$  (D)  $(-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$

(2) 已知  $(2x+a)^5$  的展开式中  $x^2$  的系数为  $-40$ , 那么  $a =$

- (A)  $-2$  (B)  $-1$  (C)  $1$  (D)  $2$

(3) 已知  $a = \log_{0.3} 3, b = \log_{0.3} 4, c = 3^{0.3}$ , 那么

- (A)  $a < b < c$  (B)  $c < b < a$   
(C)  $b < a < c$  (D)  $b < c < a$

(4) 已知  $a^2 + b^2 = 2$ , 那么  $a + b$  的最大值为

- (A)  $1$  (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $2$  (D)  $2\sqrt{2}$

(5) 在平行四边形  $ABCD$  中, 已知  $\overrightarrow{AB} = (2, 2), \overrightarrow{AD} = (-1, 5), E$  为  $CD$  的中点, 那么  $\overrightarrow{BE} =$

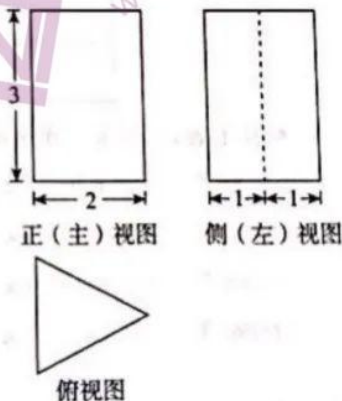
- (A)  $(-2, 4)$  (B)  $(-2, 3)$   
(C)  $(-1, 4)$  (D)  $(-1, 3)$

(6) 已知函数  $f(x)$  满足  $f(x+2) = 2f(x)$ , 当  $x \in [0, 2)$  时,  $f(x) = x$ , 那么  $f(21) =$

- (A)  $2^{10}$  (B)  $2^{11}$  (C)  $2^{20}$  (D)  $2^{21}$

(7) 某三棱柱的三视图如图所示, 该三棱柱的表面积为

- (A)  $8 + 3\sqrt{2}$   
(B)  $18 + 2\sqrt{3}$   
(C)  $22$   
(D)  $10 + 6\sqrt{5}$



- 8) 已知双曲线  $C: mx^2 - ny^2 = 1 (mn > 0)$ , 那么“双曲线  $C$  的渐近线为  $y = \pm 2x$ ”是“ $m = 4n$ ”的
- (A) 充分而不必要条件  
(B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件  
(D) 既不充分也不必要条件

9) 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ,  $2a - 2c = b$ , 那么  $\frac{c}{a} =$

- (A)  $\frac{3}{8}$  (B)  $\frac{3}{7}$   
(C)  $\frac{7}{15}$  (D)  $\frac{8}{15}$

10) 有三个因素会影响某种产品的产量, 分别是温度(单位:  $^{\circ}\text{C}$ )、时间(单位: min)、催化剂用量(单位: g), 三个因素对产量的影响彼此独立. 其中温度有三个水平: 80、85、90, 时间有三个水平: 90、120、150, 催化剂用量有三个水平: 5、6、7. 按全面实验要求, 需进行 27 种组合的实验, 在数学上可以证明: 通过特定的 9 次实验就能找到使产量达到最大的最优组合方案, 下表给出了这 9 次实验的结果:

实验号	温度( $^{\circ}\text{C}$ )	时间(min)	催化剂用量(g)	产量(kg)
1	80	90	5	31
2	80	120	6	54
3	80	150	7	38
4	85	90	6	53
5	85	120	7	49
6	85	150	5	42
7	90	90	7	57
8	90	120	5	62
9	90	150	6	64

根据上表, 三因素三水平的最优组合方案为

- (A)  $85^{\circ}\text{C}$  120 min 7 g  
(B)  $90^{\circ}\text{C}$  120 min 6 g  
(C)  $85^{\circ}\text{C}$  150 min 6 g  
(D)  $90^{\circ}\text{C}$  150 min 7 g

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分。

(11)复数 $(2-i)^2$ 的实部为\_\_\_\_\_.

(12)已知直线  $l$  不在平面  $\alpha, \beta$  内,给出下列三个论断:

- ① $l \perp \alpha$ ;      ② $l // \beta$ ;      ③ $\alpha \perp \beta$ .

以其中的两个论断作为条件,余下的一个论断作为结论,写出一个正确的命题:\_\_\_\_\_.

(13)已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  过点  $M(4, 4)$ ,那么抛物线  $C$  的准线方程为\_\_\_\_\_.

设  $N$  为平面直角坐标系  $xOy$  内一点,若线段  $MN$  的垂直平分线过抛物线  $C$  的焦点  $F$ ,那么线段  $FN$  的长度为\_\_\_\_\_.

(14)角  $\alpha$  的终边与单位圆的交点  $A$  位于第一象限,其横坐标为  $\frac{3}{5}$ ,那么  $\sin \alpha =$ \_\_\_\_\_.

点  $A$  沿单位圆逆时针运动到点  $B$ ,所经过的弧长为  $\frac{\pi}{4}$ ,则点  $B$  的横坐标为\_\_\_\_\_.

(15)对于定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $y = g(x)$ ,设关于  $x$  的方程  $g(x) = t$ ,对任意的实数  $t$  总有有限个根,记根的个数为  $f_g(t)$ ,给出下列命题:

①存在函数  $y = g(x)$  满足:  $f_g(t) > 0$ ,且  $y = g(x)$  有最小值;

②设  $h(x) = |g(x)|$ ,若  $f_h(t) = f_g(t)$ ,则  $g(x) \geq 0$ ;

③若  $f_g(t) = 1$ ,则  $y = g(x)$  为单调函数;

④设  $h(x) = g(x+a) (a \in \mathbf{R})$ ,则  $f_h(t) = f_g(t)$ .

其中所有正确命题的序号为\_\_\_\_\_.



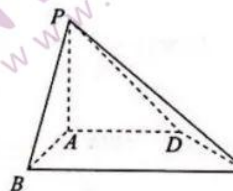
三、解答题共 6 小题,共 85 分。解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 13 分)

如图,四棱锥  $P-ABCD$  中, $PA \perp$  平面  $ABCD$ , $AB \perp BC$ , $AD \parallel BC$ , $PA=AB=AD=BC=2$ .

(I) 求证: $AD \perp$  平面  $PAB$ ;

(II) 求二面角  $P-CD-A$  的余弦值.



(17)(本小题 13 分)

已知等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 + a_2 = 3$ ,  $a_4 + a_5 = 24$ .

(I) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知,求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

条件①: 设  $b_n = \log_2 a_{2n-1}$ ;

条件②: 设  $b_n = a_n + 2n$ .

注: 如果选择条件①、条件②分别解答,按第一个解答计分.

(18)(本小题 14 分)

某市 2019 年一季度全市居民人均消费支出情况如下表所示, 全市居民分为城镇居民和农村居民, 人均消费支出分为食品烟酒、衣着、居住、生活用品及服务、交通和通信、教育文化和娱乐、医疗保健、其他用品及服务共 8 类.

2019 年一季度 单位: 元

指标名称	全市居民		城镇居民	
	2019 年一季度	增速(%)	2019 年一季度	增速(%)
人均消费支出	10 637	7.4	11 440	7.4
食品烟酒	2 292	8.2	2 401	8.2
衣着	628	0.0	670	-1.0
居住	3 846	5.7	4 200	5.6
生活用品及服务	546	6.8	588	8.3
交通和通信	1 219	11.0	1 303	10.5
教育文化和娱乐	927	10.5	1 020	11.0
医疗保健	874	14.2	920	13.6
其他用品及服务	305	1.0	338	2.7

- (I) 从全市居民的 8 类人均消费支出中随机选取 1 类, 求这类人均消费支出超过 1 000 元概率;
- (II) 从城镇居民的 8 类人均消费支出中随机选取 3 类, 记  $X$  表示其中不超过 2 000 元的个数, 求  $X$  的分布列及数学期望;
- (III) 请直接写出这 8 类人均消费支出中, 农村居民人均消费支出增速大于城镇居民人均消费支出增速的类别.

(19)(本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = \sin x - (x-a)\cos x$ , 其中  $a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

- (I) 若曲线  $y = f(x)$  在  $x = a$  处的切线过点  $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ , 求  $a$  的值;
- (II) 若  $f(x) > a^3 - 1$  对  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

(20)(本小题 15 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ , 左、右顶点分别为  $A(-2, 0), B(2, 0)$ ,

$$|AF| = 3|FB|.$$

(I) 求椭圆  $C$  的方程;

(II) 设过  $P(2, 1)$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  交于不同的两点  $M, N$ , 过点  $N$  作  $x$  轴的垂线, 与直线  $BM$  交于点  $D, E$  为线段  $DN$  的中点. 证明: 直线  $BE$  的斜率为定值.

(21)(本小题 15 分)

设数列  $A: x_1, x_2, \dots, x_n (n \geq 3)$ .

定义集合  $S(A, k) = \{s | s = \frac{x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k}}{k}, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$ , 其中  $k (2 \leq k \leq n)$  为给定的正整数.

(I) 若  $A: 0, 2, 4$ , 求  $S(A, 2)$ ;

(II) 若  $A$  中的项  $x_i \in S(A, n-1) (i=1, 2, \dots, n)$ , 求证:  $A$  为常数列;

(III) 记集合  $S(A, k)$  的最大元素为  $s_k$ , 求证:  $s_{k+1} \leq s_k (2 \leq k \leq n-1)$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。

总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》