THUSSAT 中学生标准学术能力测试

中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 11 月测试

数学 参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

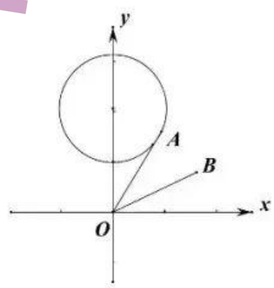
1	2	3	4	5	6	7	8
D	A	A	C	B	B	C	C

8.【解析】点 $A(x,y)$ 在圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 上，$B(\sqrt{3},1)$

则 $\dfrac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|}=|\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=2\cos\angle AOB$

如图，当 OA 与圆相切时，$\angle AOB$ 取得最小值 $\dfrac{\pi}{6}$

所以 $\dfrac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\sqrt{3}$，此时点 $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.



二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对得 3 分，有错选的得 0 分．

9	10	11	12
AC	CD	ABC	AD

12.【解析】$\because x_1^2-y_1^2=4$，$x_2^2-y_2^2=4$，$\therefore (x_1-x_2)x_0=(y_1-y_2)y_0$

直线 AB 的斜率为 $\dfrac{1}{y_0}$，直线 AB 的方程为 $x=y_0y-y_0^2+1$

将直线 AB 方程代入双曲线方程得：$(y_0^2-1)y^2-2y_0(y_0^2-1)y+(y_0^2-1)^2-4=0$

整理得 $(y-y_0)^2=1+\dfrac{4}{y_0^2-1}>0$，所以 $|y_0|>1$．故选项 A 正确．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. $[-2,2]$　　14. 10　　15. $\sqrt{3}$　　16. $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$

16.【解析】设 $g(x)=f(x)-2x^2+1$，则 $g'(x)=f'(x)-4x>0$

所以函数 $g(x)$ 在 R 上为增函数．

$\because g(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-2\times(\frac{1}{2})^2+1=0$

$\therefore g(\sin\alpha)=f(\sin\alpha)-2\sin^2\alpha+1=f(\sin\alpha)+\cos2\alpha=g(\frac{1}{2})>0$

得$\sin\alpha>\frac{1}{2}$，又$\because 0\le\alpha\le 2\pi$，$\therefore \frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{5\pi}{6}$

所以不等式$f(\sin\alpha)+\cos 2\alpha>0$的解集为$\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$.

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（10分）

解：

（1）该企业男员工从不使用方式B的概率为$\frac{100}{600}=\frac{1}{6}$------2分

该企业女员工从不使用方式B的概率为$\frac{100}{400}=\frac{1}{4}$------4分

（2）该企业男员工经常使用方式A的概率为$\frac{200}{600}=\frac{1}{3}$

该企业女员工经常使用方式A的概率为$\frac{300}{400}=\frac{3}{4}$------2分

两名男员工经常使用方式A，女员工不经常使用方式A的概率为

$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{36}$

有一名男员工经常使用方式A，一名女员工经常使用方式A的概率为

$C_2^1\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{1}{3}$------4分

所以3人中恰有2人经常使用方式A的概率为$\frac{1}{36}+\frac{1}{3}=\frac{13}{36}$------6分

18.（12分）

解：

（1）$a_3=a_1+4$，$a_4=a_1+6$------2分

$\because a_1$，a_3，a_4成等比数列，$\therefore a_3^2=a_1a_4$，得$(a_1+4)^2=a_1(a_1+6)$

$\therefore a_1=-8$------4分

（2）$S_n=na_1+n(n-1)$------4分

$\because S_n\ge-20$，$\therefore n^2+(a_1-1)n+20\ge0$，即$n+\frac{20}{n}\ge1-a_1$

$\because n+\frac{20}{n}$的最小值为9------6分

$\therefore 1-a_1\le9$，所以a_1的取值范围为$[-8,+\infty)$------8分

19.（12分）

THUSSAT
中学生标准学术能力测试

解：

（1）由正弦定理 $a\sin B = b\sin A = 2\sqrt{3}$--------------------2 分

$\because a=4$，$\therefore \sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\because \Delta ABC$ 为锐角三角形，$\therefore B=60^\circ$--------------------4 分

（2）$\because R=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$，$\therefore b=2R\sin B=2\sqrt{7}$--------------------2 分

$\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$\therefore 28=16+c^2-8c\cos 60^\circ$，得 $c^2-4c-12=0$

$\therefore c=6$，$BD=3$--------------------5 分

在 ΔBCD 中，$CD^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cdot\cos B$

$\therefore CD^2=9+16-2\times3\times4\cos 60^\circ=13$

$\therefore CD=\sqrt{13}$--------------------8 分

20.（12 分）

解：

（1）设 O 为 AC 的中点

$\because AD=CD$，$\therefore OD\perp AC$--------------------1 分

$\because$ 平面 $ACD\perp$ 平面 ABC

$\therefore OD\perp$ 底面 ABC--------------------3 分

进而得 $OD\perp BC$，又 $\because AD\perp BC$

$\therefore BC\perp$ 平面 ACD--------------------5 分

进而得 $BC\perp AC$--------------------6 分

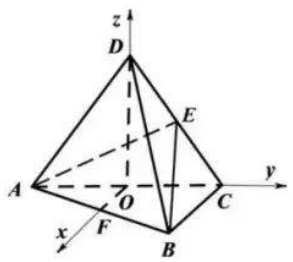
（2）设 AB 中点为 F

$\because OF\parallel BC$，$BC\parallel AC$

$\therefore OF\perp AC$

由（1）知 OF、OC、OD 两两垂直，

以 OF、OC、OD 为 x 轴、y 轴、z 轴正半轴建立空间直角坐标系--------------------1 分



则 $A(0,-1,0)$，$D(0,0,\sqrt{3})$，$C(0,1,0)$，$F(1,0,0)$

$\because E$ 是 CD 的中点

$\therefore E\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$----------2 分

设平面 ABE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

$\because \overrightarrow{AE}=\left(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AF}=(1,1,0)$，$\therefore \begin{cases}\frac{3}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ x+y=0\end{cases}$

不妨取 $y=-1$，则 $\vec{n}=(1,-1,\sqrt{3})$ ----------4 分

$\because \overrightarrow{CD}=(0,-1,\sqrt{3})$

$\therefore \sin\theta=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{4}{\sqrt{5}\cdot 2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$----------6 分

21.（12 分）

解：

（1）设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ $\because f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$\therefore$ 当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$

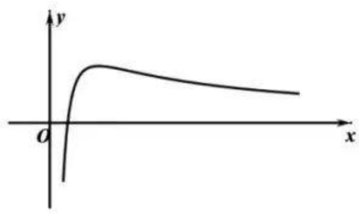
$\therefore f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}]$ 上递增，在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上递减----------2 分

$\therefore$ 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)\le f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$

$\therefore$ 方程 $x-\mathrm{e}\ln x=0$ 有唯一的零点 e

即方程 $\mathrm{e}^x=x^{\mathrm{e}}$ 有唯一的零点 e，猜想（1）正确----------4 分

（2）由 $a^b=b^a$ 得 $\frac{\ln a}{a}=\frac{\ln b}{b}$



设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

由（1）知 a,b 分别在 $(1,\mathrm{e})$ 和 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内，

不妨设 $a\in(1,\mathrm{e})$，$b\in(\mathrm{e},+\infty)$

设 $g(x)=f(x)-f\left(\frac{\mathrm{e}^2}{x}\right)=\frac{\ln x}{x}-\frac{(2-\ln x)x}{\mathrm{e}^2}$

$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{1-\ln x}{e^2}=\frac{(1-\ln x)(e^2-x^2)}{x^2e^2}$------------------------------2 分

当 $x\in(1,e)$ 时，$1-\ln x>0$，$e^2-x^2>0$

$\therefore$ 当 $x\in(1,e)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增

由此得，当 $a\in(1,e)$ 时，$g(a)<g(e)=0$------------------------------4 分

$\therefore f(a)-f\left(\frac{e^2}{a}\right)<0$

$\because f(a)=f(b)$，$\therefore f(b)<f\left(\frac{e^2}{a}\right)$------------------------------6 分

又 $\because b,\frac{e^2}{a}\in(e,+\infty)$ 且 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 递减，$\therefore b>\frac{e^2}{a}$

$\therefore ab>e^2$，猜想（2）正确------------------------------8 分

22.（12 分）

解：

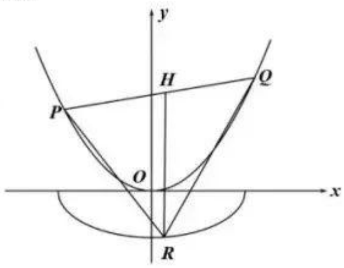
（1）$\because$ 点 $M(2,y_M)$ 在抛物线 Γ 上，$\therefore y_M=\frac{2}{p}$ ------------------------------1 分

因为线段 MN 的中点 $\left(1,\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)$ 抛物线 Γ 上------------------------------2 分

$\therefore 1=2p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)$，得 $p=1$------------------------------4 分

（2）设 $R(x_0,y_0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，PQ 的中点 $H(x_3,y_3)$

$\because$ 点 P 和 PR 的中点 $\left(\frac{x_1+x_0}{2},\frac{y_1+y_0}{2}\right)$ 均在抛物线上



$\therefore \begin{cases} x_1^2=2y_1 \\ \left(\frac{x_1+x_0}{2}\right)^2=2\times\frac{y_1+y_0}{2} \end{cases}$------------------------------1 分

整理得 $x_1^2-2x_0x_1-x_0^2+4y_0=0$

同理得 $x_2^2-2x_0x_2-x_0^2+4y_0=0$

$\therefore x_1,x_2$ 是方程 $x^2-2x_0x-x_0^2+4y_0=0$ 的两个根

进而 $x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=4y_0-x_0^2$------------------------------3 分

$\therefore x_3=\dfrac{x_1+x_2}{2}=x_0$

$y_3=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{4}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{4}$

$=\dfrac{4x_0^2-2(4y_0-x_0^2)}{4}=\dfrac{3x_0^2}{2}-2y_0$------------------------------------4 分

如图，$\because x_3=x_0$，$\therefore S=\dfrac{1}{2}\cdot|y_3-y_0|\cdot|x_1-x_2|$

$\therefore S=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\dfrac{3x_0^2}{2}-3y_0\right|\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\dfrac{3x_0^2}{2}-3y_0\right|\cdot\sqrt{4x_0^2-4(4y_0-x_0^2)}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(x_0^2-2y_0)^{\frac{3}{2}}$------------------6 分

$\because x_0^2=4-4y_0^2$ 且 $y_0<0$

$\therefore S=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(4-4y_0^2-2y_0)^{\frac{3}{2}}(-1\le y_0<0)$

所以当 $y_0=-\dfrac{1}{4}$ 时，ΔPQR 的面积 S 取得最大值 $\dfrac{51\sqrt{34}}{16}$---------------------8 分