绝密★启用前

河北省2023届高三学生全过程纵向评价（一）

数学

班级:__________姓名:__________

注意事项:

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、班级和考号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\mid -1<x<3, x\in N^{*}\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1,2\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{0,1,2,3\}$　　D. $\{1,2,3\}$

2. 已知复数 $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 $\bar{z}+\dfrac{1}{z^{2}}=$

A. $-\sqrt{3}\mathrm{i}$　　B. $-\sqrt{3}$　　C. $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　D. $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

3. 已知经过第一、二、四象限的直线 $l:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 经过点 $P(2,1)$，则 $2a+b$ 的最小值为

A. 4　　B. $4\sqrt{2}$　　C. 8　　D. 9

4. 若 $\tan\theta=2$，则 $\dfrac{\sin\theta\cos 2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=$

A. $\dfrac{6}{5}$　　B. $-\dfrac{6}{5}$　　C. $\dfrac{2}{5}$　　D. $-\dfrac{2}{5}$

5. 现有6家商户预租赁某夜市的6个相邻的摊位，其中3家商户开特色小吃店，2家商户开文创产品店，一家商户开新奇玩具店，夜市管理部门要求特色小吃店必须都相邻，且文创产品店不相邻，则不同的排法总数为

A. 48　　B. 72　　C. 144　　D. 96

6. 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，P 为椭圆上的一点，若 $\dfrac{|PF_2|}{|PF_1|^2+8|PF_2|^2}$ 的最大值为 $\dfrac{1}{8a}$，则椭圆的离心率的取值范围是

A. $\dfrac{1}{3}\le e<1$　　B. $\dfrac{1}{3}<e<1$　　C. $0<e<\dfrac{1}{3}$　　D. $0<e\le\dfrac{1}{3}$

7. 已知ΔABC中，$\angle B=\frac{\pi}{6},AC=2$，则$\angle A=\frac{\pi}{6}$的充要条件是

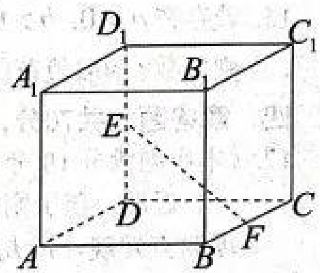
A.ΔABC是等腰三角形　B.$AB=2\sqrt{3}$　C.$BC=4$　D.$S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$，$BC<BA$

8. 已知函数$f(x)$的定义域为R，且$f(m+n)+f(m-n)=f(m)f(n)$，$f(1)=1(m,n\in R)$，则$\sum_{i=1}^{20}f(i)=$

A.0　B.1　C.-2　D.-3

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分.

9. 如图，棱长为4的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E,F分别为DD_1、BC的中点，下列结论正确的是



A.$EF\perp A_1D$

B.直线AE与平面B_1CD所成角的正切值为3

C.EF//平面A_1BD_1

D.平面AEF截正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的截面周长为$4\sqrt{5}+2\sqrt{6}$

10. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_n>0,\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{a_n}{a_n^2+n-1}(n\in N^*)$，数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则下列结论正确的是

A.$a_1a_2=1$　B.$a_1=1$　C.$S_{2020}\cdot a_{2021}=2020$　D.$S_{2020}\cdot a_{2021}>2020$

11. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，且对任意$x\in R$均有$f(x)\le\left|f(\frac{\pi}{2})\right|$，$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，则下列说法正确的有

A.函数$f(x)$为偶函数

B.函数$f(x)$的最小正周期为2π

C.若$f(x)=\frac{1}{3}(x\in[0,2\pi])$的根为$x_i(i=1,2,\cdots,n)$，则$\sum_{i=1}^{n}x_i=4\pi$

D.若$f(2x)>f(x)$在(m,n)上恒成立，则$n-m$的最大值为$\frac{\pi}{3}$

12. 已知函数$f(x)=\ln x-ax$有两个零点x_1,x_2且$x_1<x_2$，则下列结论正确的是

A.$1<x_1<e$

B.$f(x)$在区间$(e,+\infty)$上单调递减

C.$x_1+x_2>2e$

D.若$a\in\left(\frac{2}{e^2},\frac{1}{e}\right)$，则$x_2-x_1<\frac{2}{a}-1$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知数列$\{a_n\}$为等比数列，其前n项和为S_n，前三项和为13，前三项积为27，则$S_5=$______.

14. 已知O为ΔABC的外心，$AC=3$，$BC=4$，则$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=$______.

15. 已知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$，过双曲线的右焦点$F$作一条渐近线的平行线$l$与双曲线交于点$P$，与另一条渐近线交于点$Q$，$O$是坐标原点，则$\frac{S_{\Delta OPQ}}{S_{\Delta OPF}}=$______.

16. 若存在$a>0$，$b>0$，满足$a+t(b-2ea)\ln b=t(b-2ea)\ln a$，其中$e$为自然对数的底数，则实数$t$的取值范围是______.

四、解答题：共70分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分10分）

近期，孩子刷短视频上瘾成为了家长们头疼的新问题. 某市多所中学针对此展开的一项调查发现，近九成学生有使用短视频平台的习惯，近一半家长表示孩子或多或少存在沉迷短视频的现象，超半数家长认为短视频成瘾对青少年成长存在严重影响. 某校为调查学生成绩下降与“短视频成瘾”之间是否有关随机调查了200名学生的开学考试成绩，其中“短视频成瘾”的学生中成绩未下降的有35名学生.（将总排名下降5%视为成绩下降，将刷短视频一天超过两小时规定为“短视频成瘾”）

（1）若样本中“短视频成瘾”且成绩未下降的女生有15名，并在被认为“短视频成瘾”且成绩未下降的对象中按性别采用分层抽样抽取7人，再从中随机抽取2人，求抽到的两人均为女生的概率.

（2）填写下面的2×2列联表，试根据小概率值$\alpha=0.001$的独立性检验，能否认为成绩下降与“短视频成瘾”有关？

	“短视频成瘾”	没有“短视频成瘾”	合计
学习成绩下降			100
学习成绩未下降			
合计	96		

参考公式与数据：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

α	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
x_α	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

18.（本小题满分12分）

已知ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，满足$\sqrt{3}(a\cos C+c\cos A)=2b\sin B$，且$c>b$.

（1）求角B；

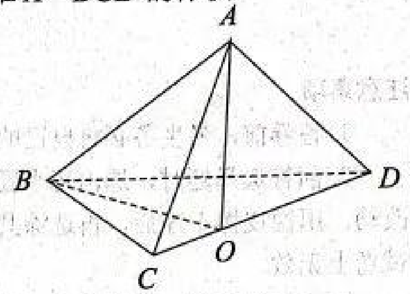
（2）若$b=\sqrt{3}$，求ΔABC周长的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

如图，三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=AD$，$AO\perp$ 平面 BCD，点 O 在线段 CD 上，且满足 $OD=2OC=2$，$BD=\sqrt{3}OB$.

（1）证明：$BC\perp AD$；

（2）若二面角 $C-AB-D$ 的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，求三棱锥 $A-BCD$ 的体积.



20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(1-x)=2$，若数列 $\{a_n\}$ 满足：

$a_n=f(0)+f(\frac{1}{n})+\cdots+f(\frac{n-1}{n})+f(1)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=\dfrac{2}{3}$，$b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}(n\geq 2)$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_n<\lambda a_{n+1}$ 对一切 $n\in N^*$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$，点 $A(4,-1)$，P 为抛物线上的动点，直线 l 为抛物线的准线，点 P 到直线 l 的距离为 d，$|PA|+d$ 的最小值为 5.

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）直线 $y=kx+1$ 与抛物线相交于 M,N 两点，与 y 轴相交于 Q 点，当直线 AM,AN 的斜率存在，设直线 AM,AN,AQ 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3 是否存在实数 λ，使得 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=\dfrac{\lambda}{k_3}$，若存在，求出 λ；若不存在，说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-ax,a\in R$.

（1）求 $f(x)$ 的极值；

（2）令 $F(x)=f(x)+ax+\sin x-bx-1$，当 $1\leq b<2$ 时，讨论 $F(x)$ 零点的个数.

河北省 2023 届高三学生全过程纵向评价（一）

数学参考答案

1.A 解析：$\because A=\{1,2\}$，$\therefore A\cap B=\{1,2\}$，$\therefore$选A.

2.A 解析：根据题意，$\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$z^2=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\frac{1}{z^2}=\frac{1}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\bar{z}+\frac{1}{z^2}=-\sqrt{3}\mathrm{i}$，$\therefore$选A.

3.D 解析：$\because l$ 经过一、二、四象限，$\therefore a>0,b>0$，又 $\because l$ 经过点 $P(2,1)$，代入得 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$，

$2a+b=(2a+b)(\frac{2}{a}+\frac{1}{b})=4+1+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geq 5+2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{2b}{a}}=9$，当且仅当 $\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$，即 $a=b=3$ 时等式成立，

$\therefore$选D.

4. A 解析：$\frac{\sin\theta\cos 2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}=\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)=\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta=$

$\frac{\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan\theta+\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2+4}{5}=\frac{6}{5}$，$\therefore$选A.

5.B 解析：由题意得，共有 $A_3^3A_2^2A_3^3=6\times2\times6=72$ 种不同的排法，$\therefore$选B.

6. A 解析：根据题意可知 $|PF_1|=2a-|PF_2|$，$|PF_2|\in[a-c,a+c]$，

$\frac{|PF_2|}{|PF_1|^2+8|PF_2|^2}=\frac{|PF_2|}{(2a-|PF_2|)^2+8|PF_2|^2}=\frac{1}{9|PF_2|+\frac{4a^2}{|PF_2|}-4a}\leq\frac{1}{8a}$，当且仅当 $|PF_2|=\frac{2}{3}a$ 时等号成立，所以 $\frac{2}{3}a\in[a-c,a+c]$，即 $\frac{2}{3}a\geq a-c$，所以 $\frac{1}{3}\leq\frac{c}{a}<1$，即 $\frac{1}{3}\leq e<1$，$\therefore$选A.

7.D 解析：当 ΔABC 是等腰三角形时，$\angle A=\frac{\pi}{6}$ 或 $\angle A=\frac{5\pi}{12}$ 或 $\angle A=\frac{2\pi}{3}$；当 $\angle A=\frac{\pi}{6}$ 时，ΔABC 是等腰三角形，所以 ΔABC 是等腰三角形是 $\angle A=\frac{\pi}{6}$ 的必要不充分条件，所以选项 A 不正确；当 $AB=2\sqrt{3}$ 时，$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$，即 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin C}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}$，$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\angle C=\frac{\pi}{3}$ 或 $\angle C=\frac{2\pi}{3}$，则 $\angle A=\frac{\pi}{2}$ 或 $\angle A=\frac{\pi}{6}$；当 $\angle A=\frac{\pi}{6}$ 时，$\angle C=\frac{2\pi}{3}$，根据正弦定理可得 $AB=2\sqrt{3}$，所以 $AB=2\sqrt{3}$ 是 $\angle A=\frac{\pi}{6}$ 的必要不充分条件，所

以选项 B 不正确；当 $BC=4$ 时，$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$,即$\frac{4}{\sin A}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}$，解得 $\sin A=1$，$\angle A=\frac{\pi}{2}$，所以 $BC=4$ 不是 $\angle A=\frac{\pi}{6}$ 的充分条件，所以选项 C 不正确；当 $\angle A=\frac{\pi}{6}$ 时，$S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$；当 $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$ 时，即 $\frac{1}{2}\cdot BC\cdot BA\cdot\sin B=\sqrt{3}$，$\therefore BC\cdot BA=4\sqrt{3}$，根据余弦定理 $BC^2+BA^2-2BC\cdot BA\cdot\cos B=4$，解得 $BC^2+BA^2=16$，$\because BC<BA$，$\therefore BC=2$，$BA=2\sqrt{3}$，则 $\angle A=\frac{\pi}{6}$，所以 $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$，$BC<BA$ 是 $\angle A=\frac{\pi}{6}$ 的充要条件，$\therefore$ 选D.

8. A 解析：由 $f(m+n)+f(m-n)=f(m)f(n)$，令 $n=1$ 得 $f(m+1)+f(m-1)=f(m)f(1)=f(m)$①，

$\therefore$ 以 $m+1$ 代换 m 得 $f(m+2)+f(m)=f(m+1)$②，由①②可得 $f(m+2)+f(m-1)=0$；

$\therefore f(m+3)+f(m)=0$，即 $f(m+3)=-f(m)$，所以 $f(m+6)=-f(m+3)=f(m)$，故6是 $f(x)$ 的一个周期；

令 $n=0$，得 $f(m)+f(m)=f(m)\cdot f(0)$，$\therefore f(0)=2$；令 $m=n=1$，得 $f(2)+f(0)=f^2(1)$，$f(2)=-1$.

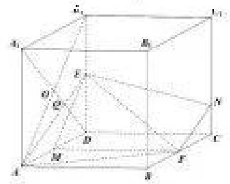
$\because f(3)+f(0)=0$，$\therefore f(3)=-2$，$f(4)=-f(1)=-1$，$f(5)=-f(2)=1$，$f(6)=f(0)=2$；

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(6)=0$，$\therefore\sum_{i=1}^{n}f(i)=3\times0+1-1=0$，$\therefore$ 选A.

9. AB 解析：取 AD 的中点 M，连接 ME、MF，则 $ME//AD_1$，$\because AD_1\perp A_1D$，$\therefore ME\perp A_1D$，

$\because AB\perp$ 平面ADD_1A_1，$\therefore AB\perp A_1D$，$\because AB//FM$，$\therefore FM\perp A_1D$，$\because ME\cap MF=M$，$\therefore A_1D\perp$ 平面EFM，

$\therefore A_1D\perp EF$，所以 A 正确；设 A_1D 与 AD_1、AE 分别交于点 O, Q，$AD_1\perp$ 平面A_1BCD，$\therefore\angle AQO$ 即为 AE 与平面 B_1CD 所成角，$\therefore\tan\angle AQO=\frac{AO}{OQ}$，其中 $AO=\frac{1}{2}AD_1=2\sqrt{2}$，



$OQ=DO-DQ=\frac{1}{2}A_1D-\frac{1}{3}A_1D=\frac{1}{6}A_1D=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\therefore\tan\angle AQO=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=3$，所以 B 正确；平面 A_1BD_1 即为平面 A_1BCD_1，$\because EF\cap BC=F$，$\therefore EF\cap$ 平面$A_1BD_1=F$，所以 C 错误；取 CC_1 靠近点 C 的四等分点 N，易证 $AE//FN$，$\therefore A,E,F,N$ 四点共面，$\therefore AEFN$ 即为平面 AEF 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面，$AE=AF=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，$FN=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$，$EN=\sqrt{1+4^2}=\sqrt{17}$，平面 AEF 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面周长为 $5\sqrt{5}+\sqrt{17}$，所以 D 错误，$\therefore$ 选AB.

10. AC 解析：由 $\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{a_n}{a_n^2+n-1}$ 得 $\frac{n}{a_{n+1}}=a_n+\frac{n-1}{a_n}$，$\therefore a_n=\frac{n}{a_{n+1}}-\frac{n-1}{a_n}$；当 $n=1$ 时，可得 $a_1a_2=1$，a_1 不可求，$\therefore$ A对.

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=(\frac{1}{a_2}-\frac{0}{a_1})+(\frac{2}{a_3}-\frac{1}{a_2})+\cdots+(\frac{n}{a_{n+1}}-\frac{n-1}{a_n})=\frac{n}{a_{n+1}}$，$\therefore S_n\cdot a_{n+1}=n$

$\therefore n=2020$ 时，$S_{2020}\cdot a_{2021}=2020$，$\therefore$ 选AC.

11. ACD 解析：$\because f(x)$ 有对称中心 $(\frac{\pi}{4},0)$，有对称轴 $x=\frac{\pi}{2}$，又在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，$\therefore \frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore T=\pi,\omega=2$ $\therefore$ B错.

$f(x)=\sin(2x+\varphi),f(\frac{\pi}{4})=\sin(2\times\frac{\pi}{4}+\omega)=0$ $\because 0<\varphi<\pi$ $\therefore \varphi=\frac{\pi}{2}$

$\therefore f(x)=\cos 2x$ 为偶函数 $\therefore$ A对.

$f(x)=\frac{1}{3}$ 在 $x\in[0,2\pi]$ 上有4个根，且 $x_1+x_2=\frac{\pi}{2}\times 2=\pi,x_3+x_4=\frac{3\pi}{2}\times 2=3\pi$ $\therefore \sum_{i=1}^{4}x_i=4\pi$ $\therefore$ C对；

由 $f(2x)>f(x)$ 得 $\cos 4x>\cos 2x$，即 $\cos 4x-\cos 2x=2\cos^2 2x-\cos 2x-1>0$，

得 $\cos 2x<-\frac{1}{2}$ $\therefore 2k\pi-\frac{2\pi}{3}<2x<2k\pi+\frac{4\pi}{3}$，$k\in Z$ $\therefore x\in(k\pi+\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{2\pi}{3})$，

$\therefore n-m$ 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$ $\therefore$ D对；综上选 ACD.

12. ACD 解析：由 $f(x)=0$ 等价于 $a=\frac{\ln x}{x}$，令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $g'(x)>0$，得 $0<x<e$

令 $g'(x)<0$，得 $x>e$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\ e)$ 单调递增，在 $(e,+\infty)$ 单调递减；$g(e)=\frac{1}{e}$，

$x\to 0,g(x)\to-\infty;x\to+\infty,g(x)\to 0$，因为 $g(1)=0$，$\therefore 1<x_1<e$，$\therefore$ A对.

$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$，令 $f'(x)>0$，得 $x\in(0,\frac{1}{a})$；令 $f'(x)<0$，得 $x\in(\frac{1}{a},+\infty)$；由 A 选项可知 $a\in(0,\frac{1}{e})$，

$\therefore \frac{1}{a}>e$，$\therefore f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ **先增后减**，$\therefore$ B错.

对于 C 选项，由 A 选项可知 $0<x_1<e<x_2$，当 $x_2\geq 2e$ 时，$x_1+x_2>2e$ 显然成立；

当 $x_2\in(e,2e)$ 时，$x_1+x_2>2e$ 等价于 $e>x_1>2e-x_2>0$.

由上可知 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，要让 $x_1>2e-x_2$，**只需**证 $f(x_1)>f(2e-x_2)$

又 $\because f(x_2)=f(x_1)$，$\therefore$ **只需**证 $f(x_2)>f(2e-x_2)$，令 $F(x)=f(x)-f(2e-x)$，$x\in(e,2e)$，

$$F'(x)=f'(x)+f'(2e-x)=\frac{1}{x}-a+\frac{1}{2e-x}-a=\frac{1}{x}+\frac{1}{2e-x}-2a=\frac{2e}{x(2e-x)}-2a$$

$\because x\in(e,2e),\therefore x(2e-x)=-x^2+2ex<e^2,\therefore F'(x)=\dfrac{2e}{x(2e-x)}-2a>\dfrac{2}{e}-2a>0$

$\therefore F(x)$ 在 $(e,2e)$ 上单调递增，$\therefore F(x)>F(e)>0$，$\therefore f(x)>f(2e-x)$，$\therefore x_1>2e-x_2$，$\therefore x_1+x_2>2e$，$\therefore$ C对；

对于 D 选项 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 单调递增，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减，且 $a\in(\dfrac{2}{e^2},\dfrac{1}{e})$；$\therefore x_1\in(0,\dfrac{1}{a})$，$x_2\in(\dfrac{1}{a},+\infty)$

$\because f(1)=-a<0=f(x_1)$，$\therefore x_1>1$，$f(\dfrac{2}{a})=\ln\dfrac{2}{a}-2<\ln e^2-2=0=f(x_2)$，$\therefore x_2<\dfrac{2}{a}$，$\therefore x_2-x_1<\dfrac{2}{a}-1$，

$\therefore$ D对；$\therefore$ 选ACD.

13. 121 或 $\dfrac{121}{9}$ 解析：$\because a_1a_2a_3=a_2^3=27$，$\therefore a_2=3$，$\therefore S_3=\dfrac{a_2}{q}+a_2+a_2q=\dfrac{3}{q}+3+3q=13$

解得 $\begin{cases}a_1=1\\ q=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=9\\ q=\dfrac{1}{3}\end{cases}$ $\therefore S_5=\dfrac{1-3^5}{1-3}=121$ 或 $S_5=\dfrac{9(1-\frac{1}{3^5})}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{121}{9}$.

14. $-\dfrac{7}{2}$ 解析：

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CB}\right|^2-(-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA}\right|^2)=\frac{1}{2}(\left|\overrightarrow{CA}\right|^2-\left|\overrightarrow{CB}\right|^2)=\frac{1}{2}\times(9-16)=-\frac{7}{2}.$$

15. $\dfrac{1}{3}$ 解析：根据题意知 $F(4,0)$，**不妨**设直线 l 的方程为：$y=-\sqrt{3}(x-4)$，代入双曲线方程，得 $3x^2-3(x-4)^2=12$.

解得 $x=\dfrac{5}{2}$，$y=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，即 $P(\dfrac{5}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2})$，双曲线的另一条渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$，联立两条直线方程

$\begin{cases}y=-\sqrt{3}(x-4)\\ y=\sqrt{3}x\end{cases}$，解得 $x=2$，$y=2\sqrt{3}$，即 $Q(2,2\sqrt{3})$，$\therefore\dfrac{S_{\Delta OPF}}{S_{\Delta OQF}}=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3}{4}$，$\therefore\dfrac{S_{\Delta OPQ}}{S_{\Delta OPF}}=\dfrac{1}{3}$.

16. $t\ge\dfrac{1}{e}$ 或 $t<0$ 解析：由 $a+t(b-2ea)\ln b=t(b-2ea)\ln a$，得 $a+t(b-2ea)\ln\dfrac{b}{a}=0$，两边同除 a 得

$1+t(\dfrac{b}{a}-2e)\ln\dfrac{b}{a}=0$，令 $x=\dfrac{b}{a}>0$，则上式等价于 $1+t(x-2e)\ln x=0$，显然 $t\neq0$，故等价于

$-\dfrac{1}{t}=(x-2e)\ln x$ 有解，令 $f(x)=(x-2e)\ln x$，$f'(x)=\ln x+1-\dfrac{2e}{x}$，$\therefore f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $\because f'(e)=0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,e)$ 单调递减，在 $(e,+\infty)$ 单调递增，$f(x)$ 在 $x=e$ 处取极小值 $f(e)=-e$

且当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，则 $f(x)\ge-e$ $\therefore$ 要使上式有解只需 $-\dfrac{1}{t}\ge-e$，$\therefore t\ge\dfrac{1}{e}$ 或 $t<0$.

17.解析：（1）由题意，“短视频成瘾”且成绩未下降的女生有 15 名，所以“短视频成瘾”且成绩未下降的男生有20名，若**按性别**采用分层抽样的方法从该样本中抽取 7 人，则其中男生 4 人，女生 3 人，记“从 7 人中抽取2人，抽到的均为女生”为事件 A，则 $P(A)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$. ……………………(4 分)

（2） 解：零假设为 H_0：成绩下降与“短视频成瘾”无关.

“短视频成瘾”的学生中成绩未下降的有 35 名学生，根据统计数据得到 2×2 列联表：

	“短视频成瘾”	没有“短视频成瘾”	合计
学习成绩下降	61	39	100
学习成绩未下降	35	65	100
合计	96	104	200

……………………………………………………………………(6 分)

所以 $\chi^2=\frac{200\times(61\times65-39\times35)^2}{96\times104\times100\times100}\approx 13.542>10.828=x_{0.001}$， ……………………………………(8 分)

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的 χ^2 独立性检验，推断 H_0 不成立，

因此可以认为成绩下降与“短视频成瘾”有关. ……………………………………(10 分)

18.解析：（1）由 $\sqrt{3}(a\cos C+c\cos A)=2b\sin B$，可得 $\sqrt{3}b=2b\sin B$. ……………………(2 分)

即 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\because c>b$，$\therefore C>B$. ……………………………………(3 分)

$\therefore B=\frac{\pi}{3}$ ……………………………………………………(4 分)

（2）$\because b=\sqrt{3}$，$B=\frac{\pi}{3}$，$\therefore$由正弦定理得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=2$，即 $a=2\sin A$，$c=2\sin C$ (6 分)

$l=a+b+c=2(\sin A+\sin C)+\sqrt{3}=2[\sin(C+\frac{\pi}{3})+\sin C]+\sqrt{3}=2(\frac{3}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C)+\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}\sin(C+\frac{\pi}{6})+\sqrt{3}$. ……………………………………………………(8 分)

$\because c>b$，$\therefore C>B=\frac{\pi}{3}$，$\because A+B+C=\pi$，$\therefore C\in(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$. …………………………(10 分)

$\therefore C+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})$，$\therefore \sin(C+\frac{\pi}{6})\in(\frac{1}{2},1)$，$\therefore l\in(2\sqrt{3},3\sqrt{3})$. ……………………… (12 分)

19. 解析：(1)证明：$AO\perp$ 平面 BCD，$\therefore AO\perp BO, AO\perp OD$，$\because AB=AD$，$\therefore \Delta AOB\cong\Delta AOD$，$\therefore OB=OD$，$\therefore BD=\sqrt{3}OB=2\sqrt{3}$，由余弦定理得 $\cos\angle BOD=\frac{BO^2+DO^2-BD^2}{2BO\cdot DO}=\frac{4+4-(2\sqrt{3})^2}{2\times2\times2}=-\frac{1}{2}$，

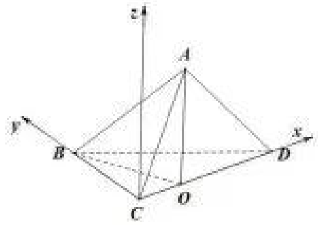
$\therefore \angle BOD=\dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore \angle BOC=\dfrac{\pi}{3}$，$\because BO=2, OC=1$，由余弦定理得 $BC=\sqrt{3}$，$\therefore BC\perp CO$，⋯（3分）

$\because AO\perp$ 平面 BCD，$AO\subset$ 平面 ACD $\therefore$ 平面$ACD\perp$ 平面BCD，$\because$ 平面$ACD\cap$ 平面$BCD=CD$，

$\therefore BC\perp$ 平面ACD，$\therefore BC\perp AD$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯（5分）

（2）由（1）知 $BC\perp CD$，过点 C 作 $Cz//AO$，以 C 为原点，以 CD, CB, Cz 分别为 x 轴、y 轴和 z 轴建立空间直角坐标系，

则 $C(0,0,0), B(0,\sqrt{3},0), D(3,0,0)$，⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯（6分）



设 $AO=a$，则 $A(1,0,a)$，

$\overline{BA}=(1,-\sqrt{3},a), \overline{BD}=(3,\sqrt{3},0), \overline{CA}=(1,0,a)$，设平面 ABC，平面 ABD 的法向量

分别为 $\overline{n_1}=(x_1,y_1,z_1), \overline{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\overline{n_1}\cdot\overline{BA}=x_1-\sqrt{3}y_1+az_1=0\\ \overline{n_1}\cdot\overline{CA}=x_1+az_1=0\end{cases}$，令 $z_1=-1$，

可得 $\overline{n_1}=(a,0,-1)$；$\begin{cases}\overline{n_2}\cdot\overline{BA}=x_2-\sqrt{3}y_2+az_2=0\\ \overline{n_2}\cdot\overline{BD}=3x_2-\sqrt{3}y_2=0\end{cases}$，令 $x_2=1$，可得 $\overline{n_2}=(1,\sqrt{3},\dfrac{2}{a})$，⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯（8分）

设二面角 $C-AB-D$ 的大小为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，$\therefore |\cos\theta|=\dfrac{1}{5}$，

$$\therefore |\cos\theta|=|\cos<\overline{n_1},\overline{n_2}>|=\frac{\left|a-\frac{2}{a}\right|}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{1+3+\frac{4}{a^2}}}=\frac{1}{5}$$，解得 $a=2$ 或 $a=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$，⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯（10分）

当 $a=2$ 时，$V_{A-BCD}=\dfrac{1}{3}\times 2S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{3}\times 2\times\dfrac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$；

当 $a=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$ 时，$V_{A-BCD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2\sqrt{14}}{7}S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2\sqrt{14}}{7}\times\dfrac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

故三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 $\sqrt{3}$ 或 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯（12分）

20.解析：（1）$a_n=f(0)+f(\dfrac{1}{n})+\cdots+f(\dfrac{n-1}{n})+f(1)$①，$a_n=f(1)+f(\dfrac{n-1}{n})+\cdots+f(\dfrac{1}{n})+f(0)$②

①+②得 $2a_n=2(n+1)$，即 $a_n=n+1$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(4分)

（2）当 $n=1$ 时，$S_1=b_1=\dfrac{2}{3}<3\lambda$，$\therefore \lambda>\dfrac{2}{9}$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(5分)

当 $n \geq 2$ 时，$b_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$，

$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \dfrac{2}{3} + (\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}) + \cdots + (\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}) = 1 - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}$，…………………………(7 分)

要满足 $S_n < \lambda a_{n+1}$，则 $\dfrac{n+1}{n+2} < \lambda(n+2)$，即 $\lambda > \dfrac{n+1}{(n+2)^2} = \dfrac{1}{n+1+\dfrac{1}{n+1}+2}$，

$\because y = x + \dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$n+1 \geq 3$，且 $n+1 \in N^*$，

$\therefore$ 当 $n+1=3$ 时，$n+1+\dfrac{1}{n+1}+2$ 取最小值 $\dfrac{3}{16}$，$\therefore \dfrac{1}{n+1+\dfrac{1}{n+1}+2} \leq \dfrac{3}{16}$，…………………………(10 分)

$\therefore \lambda > \dfrac{3}{16}, \because \dfrac{3}{16} < \dfrac{2}{9}, \therefore \lambda > \dfrac{2}{9}$. ……………………………………………………………………(12 分)

21. 解析：（1）设抛物线 C 的焦点为 $F(0,\dfrac{p}{2})$，根据抛物线的定义 $d = |PF|$，

$|PA| + d = |PA| + |PF| \geq |AF| = \sqrt{4^2 + (-1-\dfrac{p}{2})^2} = 5$．由于 $p>0$，解得 $p=4$，

则抛物线 C 的方程为 $x^2 = 8y$.……………………………………………………………………………(4 分)

（2）设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，将 $y = kx+1$ 代入抛物线 C 的方程，

整理得 $x^2 - 8kx - 8 = 0$，$x_1 + x_2 = 8k, x_1 \cdot x_2 = -8$，…………………………………………………(6 分)

$\dfrac{1}{k_1} = \dfrac{x_1-4}{y_1+1} = \dfrac{x_1-4}{kx_1+2}$，同理 $\dfrac{1}{k_2} = \dfrac{x_2-4}{kx_2+2}$．…………………………………………………(8 分)

则 $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} = \dfrac{x_1-4}{kx_1+2} + \dfrac{x_2-4}{kx_2+2} = \dfrac{2kx_1x_2 + (2-4k)(x_1+x_2) - 16}{k^2x_1x_2 + 2k(x_1+x_2)+4} = \dfrac{-32k^2-16}{8k^2+4} = -4$，$\dfrac{1}{k_3} = \dfrac{0-4}{2} = -2$，

所以 $\lambda = 2$.……………………………………………………………………………………(12 分)

22. 解析:（1） $f(x)$ 的定义域为 R, $f'(x) = e^x - a$.……………………………………………………(1 分)

①当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 R 上单调递增,无极值.……………………………………(2 分)

②当 $a>0$ 时,令 $f'(x)>0$，得 $x > \ln a$;令 $f'(x)<0$，得 $x < \ln a$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减;

在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增; $f(x)$ 在 $x = \ln a$ 处取极小值 $f(\ln a) = a(1-\ln a)$,无极大值.…………(3 分)

当$n\geq 2$时，$b_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$，

$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{2}{3}+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4})+\cdots+(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2})=1-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}$,……………………(7 分)

要满足$S_n<\lambda a_{n+1}$，则$\dfrac{n+1}{n+2}<\lambda(n+2)$，即$\lambda>\dfrac{n+1}{(n+2)^2}=\dfrac{1}{n+1+\dfrac{1}{n+1}+2}$，

$\because y=x+\dfrac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上单调递增，$n+1\geq 3$，且$n+1\in N^*$,

$\therefore$当$n+1=3$时，$n+1+\dfrac{1}{n+1}+2$取最小值$\dfrac{3}{16}$，$\therefore\dfrac{1}{n+1+\dfrac{1}{n+1}+2}\leq\dfrac{3}{16}$，……………………(10 分)

$\therefore\lambda>\dfrac{3}{16},\because\dfrac{3}{16}<\dfrac{2}{9},\therefore\lambda>\dfrac{2}{9}$. ……………………………………………………(12 分)

21. 解析：（1）设抛物线C的焦点为$F(0,\dfrac{p}{2})$，根据抛物线的定义$d=|PF|$，

$|PA|+d=|PA|+|PF|\geq|AF|=\sqrt{4^2+(-1-\dfrac{p}{2})^2}=5$，由于$p>0$，解得$p=4$，

则抛物线C的方程为$x^2=8y$.……………………………………………………(4 分)

（2）设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，将$y=kx+1$代入抛物线C的方程，

整理得$x^2-8kx-8=0$，$x_1+x_2=8k$，$x_1x_2=-8$，……………………………………(6 分)

$\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{x_1-4}{y_1+1}=\dfrac{x_1-4}{kx_1+2}$，同理$\dfrac{1}{k_2}=\dfrac{x_2-4}{kx_2+2}$，……………………………………(8 分)

则$\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=\dfrac{x_1-4}{kx_1+2}+\dfrac{x_2-4}{kx_2+2}=\dfrac{2kx_1x_2+(2-4k)(x_1+x_2)-16}{k^2x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4}=\dfrac{-32k^2-16}{8k^2+4}=-4$，$\dfrac{1}{k_3}=\dfrac{0-4}{2}=-2$，

所以$\lambda=2$.……………………………………………………………………(12 分)

22. 解析：（1）$f(x)$的定义域为R，$f'(x)=e^x-a$.……………………………………(1 分)

①当$a\leq 0$时，$f'(x)\geq 0$恒成立，$f(x)$在R上单调递增,无极值.……………………(2 分)

②当$a>0$时,令$f'(x)>0$，得$x>\ln a$；令$f'(x)<0$，得$x<\ln a$，所以$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减；

在$(\ln a,+\infty)$上单调递增；$f(x)$在$x=\ln a$处取极小值$f(\ln a)=a(1-\ln a)$，无极大值.…………(3 分)

综上所知，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 无极值；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 有极小值 $a(1-\ln a)$，无极大值.

（2）$F(x)=e^x+\sin x-bx-1\ (x\in R), F'(x)=e^x+\cos x-b$,

令 $g(x)=F'(x)=e^x+\cos x-b$, 则 $g'(x)=e^x-\sin x$.……………………………………………………(5 分)

①当 $x\le -\pi$ 时, 由 $1\le b<2$, 得 $-bx\ge b\pi\ge\pi$, $\therefore F(x)\ge e^x+\sin x+\pi-1>\pi-1-1>0$,

$\therefore F(x)$ 在 $(-\infty,-\pi]$ 上无零点.…………………………………………………………………………(7 分)

②当 $x\in[0,+\infty)$ 时, $g'(x)=e^x-\sin x\ge 1-\sin x\ge 0$, $\therefore F'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增;

$F'(x)\ge F'(0)=2-b>0$, $\therefore F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$F(x)\ge F(0)=0$,

$\therefore F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有唯一零点 $x=0$.…………………………………………………………(9 分)

③当 $x\in(-\pi,0)$ 时, $\sin x<0$, $g'(x)=e^x-\sin x>0$,

$\therefore F'(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 上单调递增, $F'(0)=2-b>0$, $F'(-\pi)=e^{-\pi}-b-1<0$.

$\therefore$ 存在 $t\in(-\pi,0)$，使 $F'(t)=0$. 当 $x\in(-\pi,t)$ 时，$F(x)$ 单调递减；当 $x\in(t,0)$ 时，$F(x)$ 单调递增；

又 $\because F(-\pi)=e^{-\pi}+b\pi-1>0$，$F(t)<F(0)=0$；

$\therefore F(x)$ 在 $(-\pi,\ t)$ 上有唯一零点，在 $(t,0)$ 上无零点，即 $F(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 上有 1 个零点.……(11 分)

综上，当 $1<b<2$ 时，函数 $F(x)$ 有 2 个零点 ………………………………………………………………(12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。