2023北京朝阳高二（下）期末

数　　学

2023.7

（考试时间120分钟　满分150分）

本试卷分为选择题50分和非选择题100分

第一部分（选择题　共50分）

一、选择题共10小题，每小题5分，共50分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，集合 $B=\{x\mid -1\leqslant x<1\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{0,1\}$　　（B）$\{-1,1\}$　　（C）$\{-1,0\}$　　（D）$\{-1,0,1\}$

（2）已知 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，且 $\sin(\pi-\alpha)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\alpha=$

（A）$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　（B）$-\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{2}{3}$　　（D）$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

（3）已知不等式 $x^2+ax+4<0$ 的解集为空集，则实数 a 的取值范围是

（A）$(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$　　（B）$(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$

（C）$(-4,4)$　　（D）$[-4,4]$

（4）从集合 $\{2,3,4,5,6,7,8\}$ 中任取两个不同的数，则取出的两个数中恰有一个是奇数的概率为

（A）$\frac{2}{7}$　　（B）$\frac{3}{7}$　　（C）$\frac{4}{7}$　　（D）$\frac{6}{7}$

（5）已知 $a=\lg\frac{1}{3}$，$b=3^{0.1}$，$c=\sin 3$，则

（A）$a>b>c$　　（B）$b>c>a$　　（C）$b>a>c$　　（D）$c>b>a$

（6）设 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$(a-b)a^2<0$”是“$a<b$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）某学校4名同学到3个小区参加垃圾分类宣传活动，每名同学只能去1个小区，且每个小区至少安排1名同学，则不同的安排方法种数为

（A）6　　（B）12　　（C）24　　（D）36

（8）已知函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，则下列结论正确的是

（A）函数 $f(x+\pi)$ 的一个周期为 $\frac{\pi}{2}$

（B）函数 $f(x+\pi)$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{6}$

（C） $y=f(x)$ 的图象可由 $y=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到

（D） $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{2}$ 对称

（9）良好生态环境既是自然财富，也是经济财富．为了保护生态环境，某工厂将产生的废气经过过滤后排放，已知过滤过程中的污染物的残留数量 y（单位：毫克/升）与过滤时间 t（单位：小时）之间的函数关系为 $y=y_0\mathrm{e}^{-kt}(t\geqslant 0)$，$k$ 为常数且 $k>0$，y_0 为原污染物数量．该工厂某次过滤废气时，若前 4 个小时废气中的污染物恰好被过滤掉 90%，那么再继续过滤 2 小时，废气中污染物的残留数量约为原污染物数量的

（A）1%　　　　（B）2%　　　　（C）3%　　　　（D）5%

（10）已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足：

① $f(2+x)+f(-x)=0$；

② $f(-1+x)=f(-1-x)$；

③当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2}x, & x\in[-1,0],\\ 1-x, & x\in(0,1],\end{cases}$

则函数 $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}$ 在区间 $[-5,3]$ 上的零点个数为

（A）3　　　　（B）4　　　　（C）5　　　　（D）6

第二部分（非选择题　共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（11）二项式 $(x+\frac{2}{x})^6$ 的展开式中的常数项是________．（用数字作答）

（12）某中学高一、高二、高三年级的学生人数分别为 1200，1000，800，为迎接运动会的到来，按照各年级人数所占比例进行分层抽样，选出 30 名志愿者，则高二年级应选出的人数为________．

（13）当 $x>-1$ 时，函数 $y=x+\frac{4}{x+1}-2$ 的最小值为________，此时 $x=$________．

（14）已知 $a>0$，则关于 x 的不等式 $x^2-4ax-5a^2<0$ 的解集是________．

（15）若函数 $y=\cos 2x$ 的图象在区间 $(-\frac{\pi}{4},m)$ 上恰有两个极值点，则满足条件的实数 m 的一个取值为________．

（16）已知集合 M 为非空数集，且同时满足下列条件：

（ⅰ） $2\in M$；

（ii）对任意的 $x\in M$，任意的 $y\in M$，都有 $x-y\in M$；

（iii）对任意的 $x\in M$ 且 $x\neq 0$，都有 $\dfrac{1}{x}\in M$．

给出下列四个结论：

① $0\in M$；

② $1\notin M$；

③对任意的 $x,y\in M$，都有 $x+y\in M$；

④对任意的 $x,y\in M$，都有 $xy\in M$．

其中所有正确结论的序号是________．

三、解答题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（17）（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x+m(\omega>0,m\in\mathbf{R})$，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，使函数　　唯一确定．

（Ⅰ）求 ω 和 m 的值；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=f(x-\dfrac{\pi}{6})$，求 $g(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值．

条件①：$f(0)=1$；

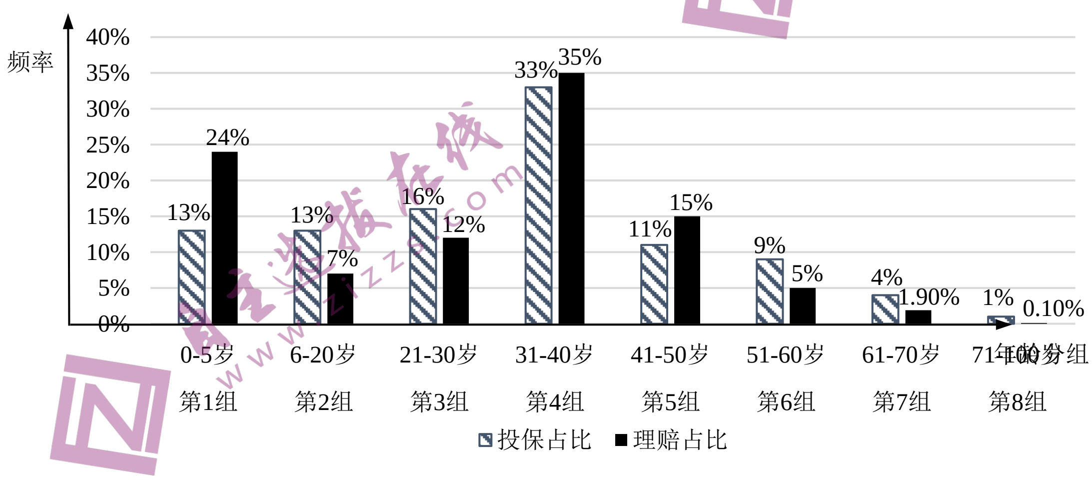
条件②：　　的最小值为 0；

条件③：　　的图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$．

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多组条件分别解答，按第一组解答计分．

（18）（本小题 14 分）

某保险公司 2022 年的医疗险理赔服务报告给出各年龄段的投保情况与理赔情况，统计结果如下：



注：第 1 组中的数据 13%表示 0-5 岁年龄段投保人数占全体投保人数的百分比为 13%；

24%表示 0-5 岁年龄段理赔人数占全体理赔人数的百分比为 24%．其它组类似.

（Ⅰ）根据上述数据，估计理赔年龄的中位数和第 90 百分位数分别在第几组，直接写出结论；

（Ⅱ）用频率估计概率，从 2022 年在该公司投保医疗险的所有人中随机抽取 3 人，其中超过 40 岁的人数记为 X，求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅲ）根据上述数据，有人认为“该公司 2022 年的理赔的平均年龄一定小于投保的平均年龄”，判断这种说法是否正确，并说明理由．

（19）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-ax\ (a\in\mathbf{R})$．

（Ⅰ）当 $a=3$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $x=2$ 是 的一个极值点，求 的单调递增区间；

（Ⅲ）是否存在 a，使得 在区间 上的最大值为 -2？若存在，求出 a 的值；若不存在，说明理由．

（20）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$，$g(x)=m(2x+1)\ (m\in\mathbf{R})$．

（Ⅰ）当 时，证明 ；

（Ⅱ）若直线 $y=g(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，设 $h(x)=f(x)-g(x)$，求证：对任意的 ，都有

．

（21）（本小题 15 分）

若有穷整数数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $1\leqslant a_i\leqslant n$ （$i=1,2,\cdots,n$），且各项均不相同，则称 A 为 P_n 数列．对 P_n 数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n$，设 ，$\lambda_i=\sum\limits_{j=1}^{i-1}\dfrac{a_i-a_j}{|a_i-a_j|}(i=2,3,\cdots,n)$，则称数列 $\lambda(A):\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为数列 A 的导出数列．

（Ⅰ）分别写出 P_4 数列 与 的导出数列；

（Ⅱ）是否存在 P_6 数列 A 使得其导出数列 $\lambda(A)$ 的各项之和为 0？若存在，求出所有符合要求的 P_6 数列；若不存在，说明理由；

（Ⅲ）设 P_n 数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $A':a_1',a_2',\cdots,a_n'$ 的导出数列分别为 $\lambda(A):\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 与 $\lambda(A'):\lambda_1',\lambda_2',\cdots,\lambda_n'$，求证： $\cdots$ 的充分必要条件是 $\lambda_i=\lambda_i'(i=1,2,\cdots,n)$．

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

（1）C　　（2）A　　（3）D　　（4）C　　（5）B

（6）A　　（7）D　　（8）B　　（9）C　　（10）B

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）160　　（12）10　　（13）1，1

（14）$(-a,5a)$　　（15）π（答案不唯一）　　（16）①③④

三、解答题（共 5 小题，共 70 分）

（17）（共 13 分）

解：选①③.

（Ⅰ）因为 $f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x+m=\sin 2\omega x+m$，

由 $f(0)=1$，得 $m=1$.

因为 　　的图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，

所以 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$.

所以 $T=\frac{2\pi}{|2\omega|}=\pi$.

因为 $\omega>0$，所以 $\omega=1$. ....6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $f(x)=\sin 2x+1$.

$g(x)=f(x-\frac{\pi}{6})=\sin(2x-\frac{\pi}{3})+1$.

因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$.

所以当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时，

$g(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上取得最大值 $g(\frac{5\pi}{12})=2$. ....13 分

选②③.

（Ⅰ）因为 $f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x+m=\sin 2\omega x+m$，

由 　　的最小值为 0，得 　　.

因为 　　的图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，

所以 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$.

所以 $T=\dfrac{2\pi}{|2\omega|}=\pi$.

因为 $\omega>0$，所以 $\omega=1$． ……………………………………………………………………6 分

（Ⅱ）同选①③.

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）理赔年龄的中位数在第 4 组，理赔年龄的第 90 百分位数在第 5 组． ……4 分

（Ⅱ）用频率估计概率，从投保医疗险的人中随机抽取 1 人超过 40 岁的概率为 $\dfrac{1}{4}$.

X 的所有可能取值为 $0,1,2,3$.

$P(X=0)=C_3^0(\dfrac{1}{4})^0(\dfrac{3}{4})^3=\dfrac{27}{64}$.

$P(X=1)=C_3^1(\dfrac{1}{4})^1(\dfrac{3}{4})^2=\dfrac{27}{64}$.

$P(X=2)=C_3^2(\dfrac{1}{4})^2(\dfrac{3}{4})^1=\dfrac{9}{64}$.

$P(X=3)=C_3^3(\dfrac{1}{4})^3(\dfrac{3}{4})^0=\dfrac{1}{64}$.

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{27}{64}$	$\dfrac{27}{64}$	$\dfrac{9}{64}$	$\dfrac{1}{64}$

所以随机变量 X 的数学期望

$E(X)=0\times\dfrac{27}{64}+1\times\dfrac{27}{64}+2\times\dfrac{9}{64}+3\times\dfrac{1}{64}=\dfrac{3}{4}$. ………………………………11 分

（Ⅲ）不正确.

比如理赔的年龄比较靠近每一组区间的右端点，

投保的年龄比较接近每一组区间的左端点，

这样估计的结果就是理赔的平均年龄较大.

用区间的右端点估计理赔的平均年龄为

$5\times0.24+20\times0.07+30\times0.12+40\times0.35+50\times0.15+60\times0.05+70\times0.019+100\times0.001$

$=32.13,$

用区间的左端点估计投保的平均年龄为

$0\times0.13+6\times0.13+21\times0.16+31\times0.33+41\times0.11+51\times0.09+61\times0.04+71\times0.01$

$=26.62,$

因为 32.13>26.62，所以说法不正确． ………………………………………………………14 分

（19）（共 15 分）

解：函数 $f(x)=\ln x-ax$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a$.

（Ⅰ）当 $a=3$ 时，$f(x)=\ln x-3x$，所以 $f(1)=-3$.

因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-3$，所以 $f'(1)=1-3=-2$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y+3=-2(x-1)$，

即 $2x+y+1=0$. ....4 分

（Ⅱ）因为 $x=2$ 是　　的一个极值点，所以 $f'(2)=\dfrac{1}{2}-a=0$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$.

所以 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}x$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}$.

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)>0$，　　单调递增；

当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，　　单调递减.

所以当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$x=2$ 是　　的极大值点.

此时　　的单调递增区间为 $(0,2)$. ....9 分

（Ⅲ）①当 $a\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，

因为 $x\in(0,\mathrm{e}]$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}-a\geqslant 0$，

所以　　在区间　　上单调递增.

此时 $f(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=\ln\mathrm{e}-a\mathrm{e}=1-a\mathrm{e}$.

若 $1-a\mathrm{e}=-2$，则 $a=\dfrac{3}{\mathrm{e}}$，不合题意.

②当 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，即 $0<\dfrac{1}{a}<\mathrm{e}$ 时，

令 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=0$，解得 $x=\dfrac{1}{a}$.

当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，　　单调递增；

当 $\dfrac{1}{a}<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$，　　单调递减.

此时 $f(x)_{\max}=f(\dfrac{1}{a})=\ln\dfrac{1}{a}-1$.

若 $\ln\frac{1}{a}-1=-2$，则 $a=\mathrm{e}$，符合题意.

综上，当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,\mathrm{e}]$ 上的最大值为 -2． .... 15 分

（20）（共 13 分）

解：（Ⅰ）当 $m=1$ 时，设 $\varphi(x)=f(x)-g(x)=\mathrm{e}^{2x}-2x-1$，则 $\varphi'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-2$．

令 $\varphi'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-2=0$，解得 $x=0$．

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$．

所以 $f(x)\geqslant g(x)$ 成立. .... 5 分

（Ⅱ）由已知得 $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}$．

设切点为 $P(x_0,\mathrm{e}^{2x_0})$，

则 $\begin{cases}2\mathrm{e}^{2x_0}=2m,\\ m(2x_0+1)=\mathrm{e}^{2x_0},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=0,\\ m=1.\end{cases}$

所以 $g(x)=2x+1$，$h(x)=\mathrm{e}^{2x}-2x-1$．

要证 $\dfrac{h(a)-h(b)}{a-b}<2\mathrm{e}^{2a}-2$，

即证 $\dfrac{\mathrm{e}^{2a}-2a-\mathrm{e}^{2b}+2b}{a-b}<2\mathrm{e}^{2a}-2$，

即证 $\dfrac{\mathrm{e}^{2a}-\mathrm{e}^{2b}}{a-b}<2\mathrm{e}^{2a}$，

即证 $1-\mathrm{e}^{2b-2a}<2(a-b)$．

令 $2a-2b=t,t>0$，原不等式等价于 $1-\mathrm{e}^{-t}<t$，即 $t+\mathrm{e}^{-t}>1$．

设 $F(t)=t+\mathrm{e}^{-t}$，则 $F'(t)=1-\mathrm{e}^{-t}>0$．

所以 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $F(t)>F(0)=1$．

所以 $t+\mathrm{e}^{-t}>1$ 成立.

所以对任意 $a>b$，都有 $\dfrac{h(a)-h(b)}{a-b}<2\mathrm{e}^{2a}-2$． .... 13 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）$2,1,4,3$ 的导出数列为 $0,-1,2,1$，

$3,1,4,2$ 的导出数列为 $0,-1,2,-1$． .... 4 分

（Ⅱ）不存在，理由如下：

设 $A: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$，

则 $\lambda_1 = 0$， $\lambda_2 = \dfrac{a_2 - a_1}{|a_2 - a_1|}$， $\lambda_3 = \dfrac{a_3 - a_1}{|a_3 - a_1|} + \dfrac{a_3 - a_2}{|a_3 - a_2|}$，

$\lambda_4 = \dfrac{a_4 - a_1}{|a_4 - a_1|} + \dfrac{a_4 - a_2}{|a_4 - a_2|} + \dfrac{a_4 - a_3}{|a_4 - a_3|}$，

$\lambda_5 = \dfrac{a_5 - a_1}{|a_5 - a_1|} + \dfrac{a_5 - a_2}{|a_5 - a_2|} + \dfrac{a_5 - a_3}{|a_5 - a_3|} + \dfrac{a_5 - a_4}{|a_5 - a_4|}$，

$\lambda_6 = \dfrac{a_6 - a_1}{|a_6 - a_1|} + \dfrac{a_6 - a_2}{|a_6 - a_2|} + \dfrac{a_6 - a_3}{|a_6 - a_3|} + \dfrac{a_6 - a_4}{|a_6 - a_4|} + \dfrac{a_6 - a_5}{|a_6 - a_5|}$.

因为 $\dfrac{a_i - a_j}{|a_i - a_j|} \in \{-1, 1\} (i \neq j)$，

所以 $\lambda_2 \in \{-1, 1\}$ 是奇数，

$\lambda_3 \in \{-2, 0, 2\}$ 是偶数，

$\lambda_4 \in \{-3, -1, 1, 3\}$ 是奇数，

$\lambda_5 \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ 是偶数，

$\lambda_6 \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$ 是奇数.

因为 $\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6$ 共三个奇数，

所以 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6$ 是奇数.

所以 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6$ 不可能为 0. ………………………………………………9 分

（Ⅲ）必要性：

若 $a_i = a_i' (i = 1, 2, \cdots, n)$，

则 $\lambda_1 = \lambda_1' = 0$，

$\lambda_i = \sum\limits_{j=1}^{i-1} \dfrac{a_i - a_j}{|a_i - a_j|} = \sum\limits_{j=1}^{i-1} \dfrac{a_i' - a_j'}{|a_i' - a_j'|} = \lambda_i' (i = 2, 3, \cdots, n)$.

充分性：下面用反证法证明.

假设存在 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$，使得 $a_i \neq a_i'$.

若 $a_n \neq a_n'$，令 $k = n$.

若 $a_n = a_n', a_{n-1} = a_{n-1}', \cdots, a_{j+1} = a_{j+1}', a_j \neq a_j'$，令 $k = j$.

因为 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \{a_1', a_2', \cdots, a_n'\}$，

所以$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}=\{a_1',a_2',\cdots,a_k'\}$.

设$a_1,a_2,\cdots,a_{k-1}$中有l项比a_k小，则有$k-l-1$项比a_k大，

所以$\lambda_k=l-(k-l-1)=2l-k+1$.

设$a_1',a_2',\cdots,a_{k-1}'$中有$l'$项比$a_k'$小，则有$k-l'-1$项比$a_k'$大，

所以$\lambda_k'=l'-(k-l'-1)=2l'-k+1$.

因为$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}=\{a_1',a_2',\cdots,a_k'\}$且$a_k\neq a_k'$，所以$l\neq l'$，

所以$\lambda_k\neq\lambda_k'$，矛盾.

所以$a_i=a_i'(i=1,2,\cdots,n)$. 15分