

2022~2023 学年第一学期福州市高一期末质量抽测

数学参考答案及评分细则

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2. 对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应给分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分。

3. 解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1.B 2.B 3.A 4.A
5.B 6.D 7.C 8.D

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. AC 10. ACD 11. BC 12. BD

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13.9 14. $\frac{2\pi}{5}$ (注意: 答案不唯一, 从 $\frac{2\pi}{5} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 中任取一个值都是对的.)
15. 576 16.3

附部分题的解析:

$$8. \text{【解析】} \because b = \log_3 4 = \frac{\lg 4}{\lg 3} = \frac{2\lg 2}{\lg 3}, \quad c = \log_5 8 = \frac{\lg 8}{\lg 5} = \frac{3\lg 2}{\lg 5},$$

$$\therefore b - c = \frac{2\lg 2}{\lg 3} - \frac{3\lg 2}{\lg 5} = \frac{2\lg 2 \cdot \lg 5 - 3\lg 2 \cdot \lg 3}{\lg 3 \cdot \lg 5} = \frac{\lg 2(2\lg 5 - 3\lg 3)}{\lg 3 \cdot \lg 5} = \frac{\lg 2(\lg 25 - \lg 27)}{\lg 3 \cdot \lg 5} < 0, \therefore b < c.$$

$$\because \log_3 8 < \log_3 \sqrt{125} = \log_3 5^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}, \therefore c < \frac{3}{2},$$

$$\because \log_2 3 > \log_2 \sqrt{8} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}, \therefore a > \frac{3}{2}, \text{ 所以 } b < c < a. \text{ 故选 D.}$$

12. 【解析】方法一、设在 $\triangle ABC$ 中, $C = 90^\circ$, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,

所以 $c^2 = a^2 + b^2$, 且 $\frac{1}{2}ab = 4$.

选项 A, $c = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{2ab} = 4$, 故选项 A 错误.

选项 B, 设斜边 c 上的高为 h , 所以 $ch = ab = 8$, 故 $h = \frac{8}{c} \leq \frac{8}{4} = 2$, 故选项 B 正确.

选项 C, 设正方形的边长为 x , 则相似比得 $\frac{h-x}{h} = \frac{x}{c}$, 即有 $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{c}$,

即 $\frac{1}{x} = \frac{c}{8} + \frac{1}{c}$ ($c \geq 4$), 而函数 $f(c) = \frac{c}{8} + \frac{1}{c}$ 在 $[4, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\frac{1}{x} \geq \frac{4}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,

故 $x \leq \frac{4}{3}$, 所以正方形面积 $x^2 \leq \frac{16}{9}$, 选项 C 错误.

选项 D, 周长 $P = a + b + c = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \geq 2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab} \geq 4 + 4\sqrt{2}$, 故选项 D 正确. 故选 BD.

方法二、选项 A、B、D 判断同方法一.

选项 C, 设正方形的边长为 x , 则 $a = x \cos B + \frac{x}{\sin B}$, $b = x \cos A + \frac{x}{\sin A} = x \sin B + \frac{x}{\cos B}$,

所以 $8 = ab = x^2 \left(2 + \frac{\sin 2B}{2} + \frac{2}{\sin 2B} \right)$, 所以 $x^2 = \frac{8}{2 + \frac{\sin 2B}{2} + \frac{2}{\sin 2B}}$,

设 $\sin 2B = t$, ($0 < t \leq 1$), $y = \frac{t}{2} + \frac{2}{t}$ 在 $(0, 1]$ 单调递减,

所以当 $t = 1$ 时, $y_{\min} = \frac{1}{2} + \frac{2}{1} = \frac{5}{2}$, 所以正方形面积 $x^2 \leq \frac{16}{9}$, 选项 C 错误. 故选 BD.

16. 【解析】方法一、由于 $\max\{x, -x\} = |x|$, 所以原方程化为 $t = |x| + \frac{1}{|x|}$.

设 $f(x) = |x| + \frac{1}{|x|}$, 易知 $f(x) = f(-x)$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. 又由于 $|x| + \frac{1}{|x|} \geq 2$,

所以当 $t \geq 2$ 时, 原方程有解. 不妨设 x_0 是原方程的根,

所以 $-x_0$, $\frac{1}{x_0}$, $-\frac{1}{x_0}$, (可重根) 也是原方程的根,

再由原方程是可化为关于 $|x|$ 的一元二次方程,

所以原方程恰有四个根, 可表示为 x_0 , $-x_0$, $\frac{1}{x_0}$, $-\frac{1}{x_0}$,

所以 $|x_0| + |-x_0| + \left|\frac{1}{x_0}\right| + \left|-\frac{1}{x_0}\right| = 6$, 即 $2t = 6$, 解得 $t = 3$.

方法二、由于 $\max\{x, -x\} = |x|$, 所以原方程化为 $t = |x| + \frac{1}{|x|}$, 即 $|x|^2 - t|x| + 1 = 0$ ($x \neq 0$).

当 $x > 0$ 时, 依题意知, 方程 $x^2 - tx + 1 = 0$ 有根, 设其两根分别为 x_1, x_2 ,

则 $x_1 x_2 = 1 > 0$, 所以方程 $x^2 - tx + 1 = 0$ 有两正根 x_1, x_2 , 且 $x_1 + x_2 = t$,

当 $x < 0$ 时, 同理可得, 方程 $x^2 + tx + 1 = 0$ 有两负根 x_3, x_4 , 且 $x_3 + x_4 = -t$,

所以 $|x_3| + |x_4| = t$, 所以 $2t = 6$, 解得 $t = 3$.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

高一数学参考答案及评分细则 第 2 页 (共 10 页)

【考查意图】本小题主要考查函数、一元二次函数等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力；考查化归与转化思想、函数与方程思想、数形结合思想；考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性。满分 10 分。

【解】(1) 依题意，得 $\begin{cases} f(1)=1+b+c=0 \\ f(3)=9+3b+c=0 \end{cases}$ 2 分

解得 $\begin{cases} b=-4 \\ c=3 \end{cases}$, 4 分

所以 $f(x)=x^2-4x+3$ 5 分

(2) 由 (1) 知, $f(x)=x^2-4x+3(x \in [-2,5])$.

所以 $f(x)=(x-2)^2-1$ 在 $[-2,2]$ 上单调递减, 在 $[2,5]$ 上单调递增, 7 分

而 $f(-2)=15, f(2)=-1, f(5)=8$, 9 分

因为 $-1 < 8 < 15$, 所以 $-1 \leq f(x) \leq 15$,

所以 $f(x)$ 在 $[-2,5]$ 上的取值范围为 $[-1,15]$ 10 分

18. (12 分)

【考查意图】本小题主要考查三角函数中诱导公式、同角三角函数的基本关系式、三角恒等变换等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力；考查化归与转化思想、函数与方程思想；考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性。满分 12 分。

【解】方法一、(1) 因为 $\tan \alpha = 2$,

$\therefore \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\sin(\pi - \alpha) + \cos(3\pi + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ 3 分

$= \frac{-\tan \alpha}{\tan \alpha - 1}$ 5 分

$= -2$ 6 分

(2) 因为 β 为钝角, 且 $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

所以 $\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta}$ 7 分

$= -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}$

$= -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, 8 分

所以 $\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -\frac{1}{3}$, 9 分

所以 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$ 10 分

高一数学参考答案及评分细则 第 3 页 (共 10 页)

$$= \frac{2 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)} = 7. \dots\dots\dots 12$$

方法二、(1) 因为 $\tan \alpha = 2$, 所以 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$, 即 $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$, $\dots\dots\dots 1$ 分

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\pi - \alpha) + \cos(3\pi + \alpha)} &= \frac{-\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} \dots\dots\dots 4 \text{ 分} \\ &= \frac{-2 \cos \alpha}{2 \cos \alpha - \cos \alpha} \dots\dots\dots 5 \text{ 分} \\ &= -2. \dots\dots\dots 6 \text{ 分} \end{aligned}$$

(2) 略, 同方法一.

19. (12 分)

【考查意图】本小题主要考查函数、函数基本性质、指数函数等基础知识; 考查推理论证能力、运算求解能力; 考查化归与转化思想、函数与方程思想; 考查逻辑推理、数学运算等核心素养, 体现基础性、综合性. 满分 12 分.

【解】(1) 依题意, $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = f(-x)$,

$$\text{所以 } \frac{e^x}{a} + \frac{a}{e^x} = \frac{1}{a \cdot e^x} + a \cdot e^x, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) = 0 \text{ 对一切 } x \in \mathbf{R} \text{ 成立,}$$

$$\text{由此可得 } a - \frac{1}{a} = 0, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{即 } a^2 = 1, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } a > 0, \text{ 所以 } a = 1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数. $\dots\dots\dots 5$ 分

证明如下:

$$\text{由 (1) 知, } f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \left(e^{x_1} + \frac{1}{e^{x_1}}\right) - \left(e^{x_2} + \frac{1}{e^{x_2}}\right) \dots\dots\dots 6 \text{ 分} \\ &= (e^{x_1} - e^{x_2}) + \left(\frac{1}{e^{x_1}} - \frac{1}{e^{x_2}}\right) \\ &= (e^{x_1} - e^{x_2}) + \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{e^{x_1} e^{x_2}} \end{aligned}$$

$$= (e^{x_1} - e^{x_2}) \left(1 - \frac{1}{e^{x_1+x_2}}\right)$$

$$= \frac{(e^{x_1} - e^{x_2})(e^{x_1+x_2} - 1)}{e^{x_1+x_2}}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

由 $0 < x_1 < x_2$, 得 $x_1 + x_2 > 0$, $e^{x_1} - e^{x_2} < 0$, $e^{x_1+x_2} - 1 > 0$, $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$,

即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. (12 分)

【考查意图】本小题主要考查三角函数的图象与性质等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力与创新意识，考查化归与转化思想、数形结合思想；考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性、应用性，满分 12 分.

【解法一】选①②，

(1) 因为函数 $f(x)$ 的一个零点为 0, 所以 $f(0) = 0$,

所以 $2\sin\varphi - 1 = 0$, 所以 $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

又因为 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

因为函数 $f(x)$ 图象上相邻两条对称轴的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

所以 $T = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

又因为 $0 < \omega < 3$,

所以 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 2$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$; $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

解得 $-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

所以函数 $f(x)$ 单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(2) 由 (1) 知, $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$,

因为 $f(x) \geq f(\pi)$, 所以 $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \geq 0$,

所以 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2}$, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

高一数学参考答案及评分细则 第 5 页 (共 10 页)

所以 $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 10 分

解得 $k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$, 11 分

所以使 $f(x) \geq 0$ 成立的 x 的取值集合为 $\left\{x \mid k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z})\right\}$ 12 分

【解法二】选①③,

因为函数 $f(x)$ 的一个零点为 0, 所以 $f(0) = 0$,

所以 $2\sin \varphi - 1 = 0$, 所以 $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, 1 分

又因为 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 2 分

因为函数 $f(x)$ 图象的一个最低点的坐标为 $\left(\frac{2\pi}{3}, -3\right)$,

所以 $2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = -3$,

所以 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6}\right) = -1$, 3 分

所以 $\frac{2\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\omega = 3k - 1 (k \in \mathbf{Z})$,

又因为 $0 < \omega < 3$, 所以 $\omega = 2$, 4 分

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$; 5 分

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 6 分

解得 $-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 7 分

所以函数 $f(x)$ 单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$ 8 分

(2) 略, 同解法一.

【解法三】选②③,

因为函数 $f(x)$ 图象上相邻两条对称轴的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

所以 $T = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$, 1 分

又因为 $0 < \omega < 3$,

所以 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 2$ 2 分

因为函数 $f(x)$ 图象的一个最低点的坐标为 $\left(\frac{2\pi}{3}, -3\right)$,

$$\text{所以 } 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} \times 2 + \varphi\right) - 1 = -3,$$

$$\text{所以 } \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \varphi\right) = -1, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{4\pi}{3} + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{解得 } \varphi = -\frac{11\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{又因为 } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{所以函数 } f(x) \text{ 的解析式为 } f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1; \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbf{Z}), \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbf{Z}), \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以函数 } f(x) \text{ 单调递增区间为 } \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] \ (k \in \mathbf{Z}). \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(2) 略, 同解法一.

21. (12 分)

【考查意图】本小题主要考查函数、指数函数等基础知识; 考查应用意识、抽象概括能力、推理论证能力、运算求解能力, 考查函数与方程思想、化归与转化思想、数形结合思想; 考查数学抽象、数学建模、逻辑推理、数学运算等核心素养, 体现基础性、综合性、应用性. 满分 12 分.

【解】(1) 选择 $g(x) = ab^x$ 更合适. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$(2) \text{ 依题意, 得 } \begin{cases} ab = 0.5 \\ ab^{13} = 80 \end{cases}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \times 160^{\frac{1}{12}} \\ b = 160^{\frac{1}{12}} \end{cases}, \therefore g(x) = \frac{1}{2} \times 160^{\frac{x+1}{12}}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

设在第 x 年, 全球产生的数据量达到 2020 年的 $10^{\frac{11}{12}}$ 倍,

$$\text{由 } \frac{g(x)}{g(13)} = 10^{\frac{11}{12}}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

得 $\frac{1}{2} \times 160^{\frac{x-1}{12}} = 10^{\frac{11}{12}}$, 所以 $160^{\frac{x-13}{12}} = 10^{\frac{11}{12}}$, 8 分

所以 $\frac{x-13}{12} = \log_{160} 10^{\frac{11}{12}}$,

所以 $\frac{x-13}{12} = \frac{\lg 10^{\frac{11}{12}}}{\lg 160}$, 所以 $\frac{x-13}{12} = \frac{\frac{11}{12}}{2.2} = \frac{5}{12}$, 10 分

$\therefore x-13=5$, 解得 $x=18$ 11 分

所以到第 18 年即 2025 年, 全球产生的数据量达到 2020 年的 $10^{\frac{11}{12}}$ 倍. 12 分

22. (12 分)

【考查意图】本小题主要考查函数与三角函数、函数的图象与性质、图象变换、函数零点等基础知识; 考查抽象概括能力、推理论证能力、运算求解能力与创新意识, 考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、数形结合思想; 考查数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养, 体现基础性、综合性、应用性与创新性, 满分 12 分.

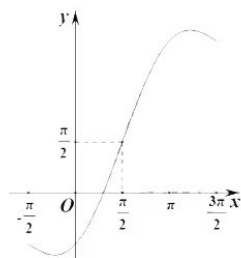
【解】(1) 因为 $f(x) = x - \frac{\pi}{2} \cos x$,

所以 $f(\pi-x) = \pi-x - \frac{\pi}{2} \cos(\pi-x) = \pi-x + \frac{\pi}{2} \cos x$, 2 分

所以 $f(\pi-x) + f(x) = \pi-x + \frac{\pi}{2} \cos x + x - \frac{\pi}{2} \cos x = \pi$ 3 分

(2) 由 (1) 知函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 对称,

则函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 的图象如下图所示,



..... 6 分

(3) 因为 $h(x) = f(x) - \sqrt{x} + \frac{\pi}{4}$,

所以 $h(x) = x - \frac{\pi}{2} \cos x - \sqrt{x} + \frac{\pi}{4} (x \geq 0)$,

设函数 $g(x) = x - \sqrt{x} (x \geq 0)$, $u(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \cos x (x \geq 0)$

①当 $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ 时,

因为函数 $g(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ 在 $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ 单调递减, 所以 $g(x) = x - \sqrt{x} \leq g(0) = 0$,

因为函数 $u(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ 单调递增, 7 分

所以 $u(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \cos x \leq \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{1}{4} < \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} = 0$,

所以 $h(x) < 0$,

所以函数 $h(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ 没有零点. 8 分

②当 $\frac{1}{4} \leq x \leq \pi$ 时,

函数 $g(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ 在 $\left[\frac{1}{4}, \pi\right]$ 上单调递增, 函数 $u(x)$ 在 $\left[\frac{1}{4}, \pi\right]$ 上单调递增,

所以 $h(x)$ 在 $\left[\frac{1}{4}, \pi\right]$ 上单调递增, 9 分

又 $h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \cos \frac{1}{4} + \frac{\pi-1}{4} < -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{\pi-1}{4} = -\frac{1}{4} < 0$,

$h(\pi) = \pi + \frac{\pi}{2} - \sqrt{\pi} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} - \sqrt{\pi} > 0$,

根据零点存在性定理,

存在唯一 $x_0 \in \left(\frac{1}{4}, \pi\right)$, 使得 $h(x_0) = 0$ 10 分

(另解: $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} > 0$,

根据零点存在性定理,

存在唯一 $x_0 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $h(x_0) = 0$.)

③当 $x > \pi$ 时,

函数 $g(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ 在 $(\pi, +\infty)$ 上单调递增,

高一数学参考答案及评分细则 第 9 页 (共 10 页)

所以 $g(x) > g(\pi) = \pi - \sqrt{\pi}$, 11 分

$u(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \cos x \geq \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$,

所以 $h(x) > \pi - \sqrt{\pi} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - \sqrt{\pi} > 0$,

所以函数 $h(x)$ 在区间 $(\pi, +\infty)$ 没有零点.

综上, 函数 $h(x)$ 有且只有一个零点 x_0 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线