开封市2023届高三年级第二次模拟考试
数学（文科）参考答案

一、选择题（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	C	D	B	A	B	D	A	D	B	D

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. -1　　14. -2　　15. $10\sqrt{3}$　　16. $\sqrt{2}-1$

三、解答题（共70分）

17.（1）当 $n\ge 2$ 时，因为 $S_n^2-S_{n-1}^2=1$，所以数列 $\{S_n^2\}$ 为等差数列，公差为1，首项为 $S_1^2=1$，……1分

所以 $S_n^2=n$，$\{a_n\}$ 为正项数列，则 $S_n=\sqrt{n}$；……3分

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$，来源：高三答案公众号

$a_1=1$ 亦适合上式，所以 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$. ……6分

（2）由（1）可知，$b_n=\dfrac{(-1)^n}{a_n}=(-1)^n\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)$，……8分

当 n 为偶数时，$T_n=-1+1+\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\text{L L}+\sqrt{n-1}+\sqrt{n}=\sqrt{n}$ ……10分

当 n 为奇数时，$T_n=-1+1+\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\text{L L}-\sqrt{n-1}-\sqrt{n}=-\sqrt{n}$ ……11分

综上可知 $T_n=\begin{cases}\sqrt{n}, & n\text{为偶数,}\\ -\sqrt{n}, & n\text{为奇数.}\end{cases}$ ……12分

18.（1）记 $AD=CD=\dfrac{1}{2}AB=a$，由已知易得：

ΔABC 中，$AC=\sqrt{2}a$，$AB=2a$，$\angle BAC=45^\circ$，所以 $BC=\sqrt{2}a$，

因为 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $AC\perp BC$，……2分

因为平面 $ACD\perp$ 平面 ABC，平面 $ACD\cap$ 平面 $ABC=AC$，所以 $BC\perp$ 平面 ACD，……4分

又 $AD\subset$ 平面 ACD，所以 $AD\perp BC$. ……5分

（2）由题意 $V_{P-ACD}=\dfrac{1}{3}h_1\,S_{\Delta ACD}$，$V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}h_2\,S_{\Delta ABC}$，……7分

因为 P 为 BD 的中点，$V_{P-ACD}=V_{A-PCD}=V_{A-PBC}=V_{P-ABC}$，……9分

所以 $\dfrac{1}{3}h_1\,S_{\Delta ACD}=\dfrac{1}{3}h_2\,S_{\Delta ABC}$，即 $\dfrac{h_1}{h_2}=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ACD}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times AC\times BC}{\frac{1}{2}\times AD\times CD}=\dfrac{\frac{1}{2}\times 2a^2}{\frac{1}{2}a^2}=2$. ……12分

19.（1）样区野生动物平均数为 $\dfrac{1200-28-8+66+70}{20}=65$，

地块数为200，该地区这种野生动物的估计值为 $200\times 65=13000$. ……3分

（2）将样本点 $(4,28),(2,8)$ 替换为 $(3,66),(3,70)$，构成一组新的样本数据 $(x_i,\ y_i)(i=1,2,\cdots,20)$，

计算得 $\bar{x}=\dfrac{60-4-2+3+3}{20}=3$，$\bar{y}=\dfrac{1200-28-8+66+70}{20}=65$，

$\sum\limits_{i=1}^{20}x_iy_i=4400-4\times 28-2\times 8+3\times 66+3\times 70=4680$，$\sum\limits_{i=1}^{20}x_i^2=260-16-4+9+9=258$ ……6分，

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}x_iy_i-20\overline{xy}}{\sum\limits_{i=1}^{20}x_i^2-20\bar{x}^2}=\dfrac{4680-20\times3\times65}{258-20\times9}=10$，$\hat{a}=65-10\times3=35$，……8 分

所求回归方程为 $\hat{y}=10x+35$.……9 分

（3）每个地块的植物覆盖面积增加 1 公顷，该地区这种野生动物增加数量的估计值为：$10\times200=2000$.……12 分

20.（1）当 AB 平行于 x 轴时，四边形 $ABCD$ 为矩形，$|AB|=2p,|AD|=\dfrac{p}{2}$，……2 分

所以 $S_{ABCD}=|AB|\cdot|AD|=2p\times\dfrac{p}{2}=p^2=4$，解得 $p=2$.……4 分

（2）由（1），抛物线$E:x^2=4y$，即$y=\frac{x^2}{4}$，$y'=\frac{x}{2}$，$F(0,1)$，

设$l:y=kx+1$，$P(x_0,\ y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$y'|_{x=x_0}=\frac{x_0}{2}=k\Rightarrow x_0=2k$，$y_0=\frac{x_0^2}{4}=k^2$，……5 分

联立$\begin{cases}x^2=4y,\\y=kx+1,\end{cases}$得$y^2-2(1+2k^2)y+1=0$，$y_1+y_2=2(1+2k^2)$，$y_1y_2=1$，……6 分

则$|AB|=y_1+y_2+2=4(1+k^2)$，点P到AB的距离$d=\frac{|2k^2-k^2+1|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{1+k^2}$，

所以$S_{\Delta ABP}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=2(1+k^2)\sqrt{1+k^2}$，$S_{弓形APB}=\frac{8}{3}(1+k^2)\sqrt{1+k^2}$，……8 分

又$|y_1-y_2|=|k||x_1-x_2|=|k||CD|$，所以$|CD|=4\sqrt{1+k^2}$，

又四边形$ABCD$是直角梯形或矩形，所以$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}|y_1+y_2|\cdot|CD|=4(1+2k^2)\sqrt{1+k^2}$，……9 分

所求概率$P=1-\frac{S_{弓形APB}}{S_{四边形ABCD}}=1-\frac{\frac{8}{3}(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}{4(1+2k^2)\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{2}$，……11 分

解得$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以该点位于图中阴影部分的概率为$\frac{1}{2}$时直线l的斜率为$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……12 分

21.（1）$f'(x)=\frac{1}{x}$，……1 分来源：高三答案公众号

所以$f'(1)=1$，故$f(x)$在点P处的切线方程为：$y=x-1$. ……4 分

（2）线段MN的中点G在第四象限，下面进行证明.

由于$|PM|=|PN|$，不妨设点M在第四象限，点N在第一象限，即：$0<m<1<n$，

线段MN的中点$G\left(\frac{m+n}{2},\frac{\ln m+\ln n}{2}\right)$，即$\left(\frac{m+n}{2},\frac{\ln(mn)}{2}\right)$.

易知$\frac{m+n}{2}>0$，下面证明：$\frac{\ln(mn)}{2}<0$，即$0<mn<1$，只要证明$n<\frac{1}{m}$即可. ……6 分

由于$|PM|=|PN|$，故：$(m-1)^2+\ln^2 m=(n-1)^2+\ln^2 n$，

构造函数$g(x)=(x-1)^2+\ln^2 x$，……7 分

$g'(x)=2(x-1)+\frac{2\ln x}{x}$，

当$0<x<1$时，$g'(x)<0$，当$x>1$时，$g'(x)>0$，

所以函数$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，……8 分

由于 $n>1,\frac{1}{m}>1$，所以要证明 $n<\frac{1}{m}$，只要证明 $g(n)<g\left(\frac{1}{m}\right)$ 即可，

又由于 $g(m)=g(n)$，故只要证明 $g(m)<g\left(\frac{1}{m}\right)$ 即可. ……9 分

下面考查：

$$g(m)-g\left(\frac{1}{m}\right)=\left[(m-1)^2+\ln^2 m\right]-\left[\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\ln^2\frac{1}{m}\right]=(m-1)^2-\left(\frac{1}{m}-1\right)^2=\left(m-\frac{1}{m}\right)\left(m+\frac{1}{m}-2\right),$$

由于 $0<m<1$，所以 $m-\frac{1}{m}<0$，$m+\frac{1}{m}-2>2\sqrt{m\cdot\frac{1}{m}}-2=0$，

所以：$g(m)-g\left(\frac{1}{m}\right)<0$，得到：$g(m)<g\left(\frac{1}{m}\right)$，……11 分

所以问题得证，因此：线段 MN 的中点 G 在第四象限. ……12 分

22.（1）由 C_2 的参数方程得：$(\cos\theta+\sin\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2=\frac{x^2}{2}+y^2=2$，

曲线 C_2 的普通方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ……4 分

（2）由已知得：曲线 C_1 为过点 $M(1,0)$ 的直线，其标准参数方程形式为：$\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$（$t$为参数），

联立 C_1 和 C_2 的方程得：$\left(1+\frac{1}{2}t\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2-4=0$，即 $7t^2+4t-12=0,\Delta>0$，……6 分

设 C_1 与 C_2 的两个交点 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，所以 $t_1+t_2=-\frac{4}{7},t_1t_2=-\frac{12}{7}$，……8 分

因为 $t_1t_2=-\frac{12}{7}<0$，由 t 的几何意义得：$\left|\frac{1}{|MA|}-\frac{1}{|MB|}\right|=\left|\frac{1}{|t_1|}-\frac{1}{|t_2|}\right|=\left|\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right|=\left|\frac{t_1+t_2}{t_1\cdot t_2}\right|=\frac{1}{3}$. ……10 分

23.（1）$\because a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$，$a^2+b^2+c^2\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$，

$\therefore (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geq 9\sqrt[3]{(abc)^3}$，……2 分 来源：高三答案公众号

$\because a+b+c=1$，$\therefore a^2+b^2+c^2\geq 9abc$，当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时“=”成立. ……4 分

（2）$\because a，b，c\in\mathbf{R}_+$，

$\therefore \frac{(b+1)^2}{a}+16a\geq 2\sqrt{\frac{(b+1)^2}{a}\cdot 16a}=8(b+1)$，当且仅当 $b+1=4a$ 时取等号，

$\frac{(c+1)^2}{b}+16b\geq 2\sqrt{\frac{(c+1)^2}{b}\cdot 16b}=8(c+1)$，当且仅当 $c+1=4b$ 时取等号，

$\frac{(a+1)^2}{c}+16c\geq 2\sqrt{\frac{(a+1)^2}{c}\cdot 16c}=8(a+1)$，当且仅当 $a+1=4c$ 时取等号，……6 分

$\therefore \frac{(a+1)^2}{c}+16c+\frac{(c+1)^2}{b}+16b+\frac{(b+1)^2}{a}+16a\geq 8(a+b+c+3)=32$，……8 分

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时“=”成立，$\therefore \frac{(a+1)^2}{c}+\frac{(c+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}\geq 16$. ……10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。