

高二期中考试 数 学

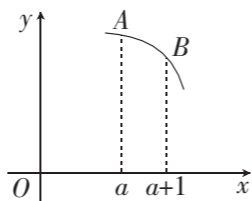
(120 分钟 150 分)

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将答题卡交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列,首项为 a_1 ,公比为 q ,则 $a_1(q-1) < 0$ 是“数列 $\{a_n\}$ 递减”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 某学习小组共有 11 名成员,其中有 6 名女生,为了解学生的学习状态,随机从这 11 名成员中抽选 2 名任小组组长,协助老师了解情况, A 表示“抽到的 2 名成员都是女生”, B 表示“抽到的 2 名成员性别相同”,则 $P(A|B) =$ ()
 A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{5}{11}$
- 中国跳水队是中国体育奥运冠军团队。自 1984 年以来,中国跳水队已经累计为我国赢得了 40 枚奥运金牌。在一次高台跳水比赛中,若某运动员在跳水过程中其重心相对于水面的高度 h (单位:米)与起跳后的时间 t (单位:秒)存在函数关系 $h(t) = 10 - 5t^2 + 5t$,则该运动员在起跳后 1 秒时的瞬时速度为 ()
 A. 10 米/秒 B. -10 米/秒
 C. 5 米/秒 D. -5 米/秒
- 函数 $f(x)$ 的图象如图所示, $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数,下列排序正确的是 ()
 A. $f(a+1) - f(a) < f'(a) < f'(a+1)$
 B. $f'(a+1) < f'(a) < f(a+1) - f(a)$
 C. $f'(a+1) < f(a+1) - f(a) < f'(a)$
 D. $f'(a) < f(a+1) - f(a) < f'(a+1)$



- 已知圆 C 与直线 $y = -x$ 及 $x + y - 4 = 0$ 都相切,圆心在直线 $y = x$ 上,则圆 C 的方程为 ()
 A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ B. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$
 C. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$ D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$
- 某人于 2020 年 6 月 1 日去银行存款 a 元,存的是一年定期储蓄,2021 年 6 月 1 日将到期存款的本息一起取出再加 a 元之后还存一年定期储蓄,此后每年的 6 月 1 日他都按照同样的方法在银行取款和存款。设银行定期储蓄的年利率 r 不变,则到 2025 年 6 月 1 日他将所有的本息全部取出时,取出的钱共有 ()
 A. $a(1+r)^4$ 元 B. $a(1+r)^5$ 元

- C. $a(1+r)^6$ 元 D. $\frac{a}{r}[(1+r)^6 - (1+r)]$ 元

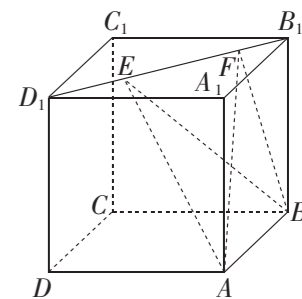
- 对于无穷数列 $\{a_n\}$,给出如下三个性质:① $a_1 < 0$;② $\forall n, s \in \mathbf{N}^*, a_{n+s} > a_n + a_s$;③ $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists t \in \mathbf{N}^*, a_{n+t} > a_n$ 。定义:同时满足性质①和②的数列 $\{a_n\}$ 为“ s 数列”,同时满足性质①和③的数列 $\{a_n\}$ 为“ t 数列”,则下列说法正确的是 ()
 A. 若 $a_n = 2n - 3$,则 $\{a_n\}$ 为“ s 数列”
 B. 若 $a_n = (-\frac{1}{2})^n$,则 $\{a_n\}$ 为“ t 数列”
 C. 若 $\{a_n\}$ 为“ s 数列”,则 $\{a_n\}$ 为“ t 数列”
 D. 若 $\{a_n\}$ 为“ t 数列”,则 $\{a_n\}$ 为“ s 数列”
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$, O 为坐标原点, F 为 C 的右焦点,过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 P, Q ,若 $\triangle POQ$ 为直角三角形,则 $|PQ| =$ ()
 A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求。全部选对得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 随着我国碳减排行动的逐步推进,我国新能源汽车市场快速发展,新能源汽车产销量大幅上升,2017—2021 年全国新能源汽车保有量 y (单位:万辆)统计数据如下表所示。

年份	2017 年	2018 年	2019 年	2020 年	2021 年
年份代码 x	1	2	3	4	5
保有量 y /万辆	153.4	260.8	380.2	492	784

- 由表格中数据可知 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x - 33.64$,则 ()
 A. $\hat{b} = 150.24$
 B. 预测 2023 年底我国新能源汽车保有量高于 1000 万辆
 C. 2017—2021 年全国新能源汽车保有量呈增长趋势
 D. 2021 年新能源汽车保有量的残差(观测值与预测值之差)为 71.44
- 如图,正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,线段 B_1D_1 上有两个动点 E, F ,且 $EF = 1$,则当 E, F 移动时,下列结论正确的是 ()
 A. $AE \parallel$ 平面 C_1BD
 B. $A_1C \perp$ 平面 AEF
 C. 三棱锥 $A - BEF$ 的体积为定值
 D. 三棱锥 $A - BEF$ 的体积不是定值
 - 下列说法不正确的是 ()
 A. 曲线的切线和曲线有且只有一个交点
 B. 过曲线上一点作曲线的切线,这点一定是切点
 C. 若 $f'(x_0)$ 不存在,则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处无切线
 D. 曲线 $y = f(x)$ 虽在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有切线,但 $f'(x_0)$ 不一定存在
 - 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,下列说法正确的是 ()
 A. 若 $S_n = n^2 + 2n - 1$,则 $a_n = 2n + 1$
 B. 若 $a_n = 3n - 23$,则 S_n 的最小值为 -77
 C. 若 $a_n = 4n - 3$,则数列 $\{(-1)^n a_n\}$ 的前 17 项和为 -33
 D. 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,且 $a_{1011} + a_{1012} < 0, a_{1000} + a_{1024} > 0$,则当 $S_n < 0$ 时, n 的最大值为 2023



座位号:

考场号:

准考证号:

姓名:

班级:

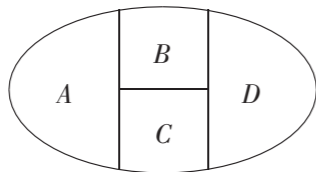
学校:

第 II 卷(非选择题)

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = x \ln x + \frac{4}{x}$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 _____.

14. 如图,用 6 种不同的颜色给图中 A, B, C, D 四块区域涂色,若相邻区域不能涂同一种颜色,则不同的涂法共有 _____ 种.



15. 已知直线 $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相交于 A, B 两点. 若 $|AB| = 6$, 则 r 的值为 _____.

16. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左焦点为 F, 点 P 在椭圆上且在 x 轴的上方. 若线段 PF 的中点在以原点 O 为圆心, $|OF|$ 为半径的圆上, 则直线 PF 的斜率是 _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, n \in \mathbf{N}^*$, 再从条件①、条件②和条件③中选择两个作为已知, 并完成解答.

条件①: $a_2 = 4$; 条件②: $a_{n+1} - a_n = 2$; 条件③: $S_2 = 6$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_3 = a_2, b_4 = a_4$, 求数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分) 求下列函数的导数:

(1) $y = x \cos x - \frac{\ln x}{x}$;

(2) $y = \frac{(1+x^2)e^x}{x}$;

(3) $y = (x^2 + 2x - 1)e^{2-x}$.

19. (12 分) 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时, $(n-1)a_n^2 - na_{n-1}^2 = n(n-1)$.

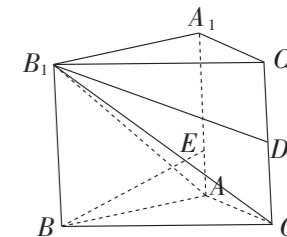
(1) 求证: 数列 $\left\{\frac{a_n^2}{n}\right\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20. (12 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = AC = 2, AA_1 = 4, AB \perp AC, BE \perp AB_1$ 交 AA_1 于点 E, D 为 CC_1 的中点.

(1) 求证: $BE \perp$ 平面 AB_1C ;

(2) 求直线 B_1D 与平面 AB_1C 所成角的正弦值.



21. (12 分) 生男生女都一样, 女儿也是传后人. 由于某些地区仍然存在封建传统思想, 头胎的男女情况可能会影响生二孩的意愿, 现随机抽取某地 200 户家庭进行调查统计. 这 200 户家庭中, 头胎为女孩的频率为 0.5, 生二孩的频率为 0.525, 其中头胎生女孩且生二孩的家庭数为 60.

(1) 完成 2×2 列联表, 依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验分析是否生二孩与头胎的男女情况有没有关联;

	生二孩	不生二孩	合计
头胎为女孩	60		
头胎为男孩			
合计			200

(2) 在抽取的 200 户家庭的样本中, 按照分层抽样的方法在生二孩的家庭中抽取了 7 户进一步了解情况, 在抽取的 7 户中再随机抽取 4 户, 求抽到的头胎是女孩的家庭户数 X 的分布列及数学期望.

附:

$\alpha = P(K^2 \geq x_\alpha)$	0.05	0.01	0.001
x_α	3.841	6.635	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \quad (\text{其中 } n = a+b+c+d).$$

22. (12 分) 已知 F 为抛物线 $C: y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点, 点 $D(0, 4)$, A 为抛物线 C 上的动点, 直线 $l: y = t (t \text{ 为常数})$ 截以 AD 为直径的圆所得的弦长为定值.

(1) 求实数 t 的值;

(2) 若点 $E(0, 3)$, 过点 A 的直线 $y = x + m$ 交抛物线于另一点 B, AB 的中垂线过点 D, 求 m 的值和 $\triangle ABE$ 的面积.