乐山市高中 2023 届第一次调查研究考试
理科数学参考答案及评分意见

2022. 12

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

CBBCC　　BAACD　　BA

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $y^2=12x$；　　14. -3；　　15. 4；　　16. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：（1）∵等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+a_3=15$，$\therefore a_2=5$. ……………………1 分

$\because a_1=2$，$\therefore d=a_2-a_1=3$，$\therefore a_n=3n-1$. ……………………3 分

∵等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1b_2b_3=64$，$\therefore b_2=4$. ……………………4 分

$\because b_1=2$，$\therefore q=\dfrac{b_2}{b_1}=2$，$\therefore b_n=2^n$. ……………………6 分

（2）由题知 $\{c_n\}$ 的前 20 项

$S_{20}=a_1+a_3+\cdots+a_{19}+\sqrt{b_2}+\sqrt{b_4}+\cdots+\sqrt{b_{20}}$ ……………………8 分

$=\dfrac{2+56}{2}\cdot 10+\dfrac{2\cdot(2^{10}-1)}{2-1}=2336$. ……………………12 分

18. 解：（1）$f(x)=\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})+\sin^2 x$

$=\cos 2x\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin 2x\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$ ……………………4 分

∴函数 $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，最小正周期为 π. ……………………6 分

（2）$\because f(\dfrac{B}{2})=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B=-\dfrac{1}{4}$，$\therefore \sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………7 分

∵ B 为锐角，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………8 分

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$， ……………………9 分

$\therefore a=2\sin A$，$c=2\sin C$.

$\therefore S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=\sqrt{3}\sin A\sin C$. ……………………10 分

$\therefore \sqrt{3}\cos A\cos C+S=\sqrt{3}(\cos A\cos C+\sin A\sin C)=\sqrt{3}\cos(A-C)$. ……………………11 分

当 $A=C=\dfrac{\pi}{3}$ 时，原式有最大值 $\sqrt{3}$. ……………………12 分

19. **解**：（1）延长 BA、CD 交于点 E，连接 EP，则 EP 为平面 PAB 和平面 PCD 的交线.

……………………3 分

$\because E\in AB$，$AB\subset$ 平面 PAB，
$\therefore E\in$ 平面 PAB.
同理可得 $E\in$ 平面 PCD.
$\therefore E\in$ 平面 $PAB\cap$ 平面 PCD.
$\because P\in$ 平面 PAB，$P\in$ 平面 PCD，
$\therefore P\in$ 平面 $PAB\cap$ 平面 PCD.
$\therefore EP$ 为平面 PAB 和平面 PCD 的交线. ……………………6 分

（2）$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp AC$，$PA\perp AB$

$\because$ 三角形 PAC 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$PA=1$，

$\therefore \frac{1}{2}PA\times AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $AC=\sqrt{2}$. 从而 $PC=\sqrt{3}$.

又在直角三角形 PAB 中，$PA=AB=1$，$\therefore PB=\sqrt{2}$.
在 $\triangle PBC$ 中，$PB=\sqrt{2}$，$BC=1$，$PC=\sqrt{3}$，
$\therefore PB^2+BC^2=PC^2$，$\therefore PB\perp BC$.
$\because BC\perp PA$，
$\therefore BC\perp$ 平面 PAB. ……………………8 分
设平面 PAB 与平面 PCD 所成锐二面角为 θ，
$\therefore \triangle PCD$ 在平面 PAB 上的投影为 $\triangle PAB$，

$\because ABCD$ 为直角梯形，由 $AB=BC=1$，$AD=\frac{1}{2}$，$\therefore DC=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$\because$ 在直角三角形 PAD 中，$PA=1$，$AD=\frac{1}{2}$，$\therefore PD=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$\because$ 在三角形 PCD 中，由 $CD=PD=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$PC=\sqrt{3}$，$\therefore S_{\triangle PCD}=\frac{}{4}$.

$$\therefore \cos\theta=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PCD}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$\therefore$ 平面 PAB 与平面 PCD 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………12 分

（注：建立空间直角坐标系也可以求解，未说明 $AB\perp AD$ 扣 2 分.）

20. **解**：（1）设实付金额为 X 元，则 X 可能取值为 0，100，200. ························1 分

则 $P(X=0)=(\frac{1}{5})^2=\frac{1}{25}$，

$P(X=100)=C_2^1(\frac{1}{5})^1\cdot(\frac{4}{5})=\frac{8}{25}$，

$P(X=200)=(\frac{4}{5})^2=\frac{16}{25}$， ························4 分

则 X 的分布列为

X	0	100	200
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{16}{25}$

$\therefore E(X)=0\times\frac{1}{25}+100\times\frac{8}{25}+200\times\frac{16}{25}=160$ （元） ························5 分

（2）若选方案一，设摸到红球的个数为 Y，实付金额为 φ，则 $\varphi=300-100Y$，

由题意得 $Y\sim B(2,\frac{1}{5})$，故 $E(Y)=2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$.

$\therefore E(\varphi)=E(300-100Y)=300-100E(Y)=300-40=260$ （元） ························7 分

若选方案二，设实付金额为 ξ，则 ξ 得可能取值为 0，150，250.

则 $P(\xi=0)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$，

$P(\xi=150)=\frac{C_2^1\cdot C_8^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$，

$P(\xi=250)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}$. ························10 分

则 ξ 的分布列为

ξ	0	150	250
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

$\therefore E(\xi)=0\times\frac{1}{45}+150\times\frac{16}{45}+250\times\frac{28}{40}\approx208.9$ （元） ························11 分

$\because E(\varphi)>E(\xi)$，

$\therefore$ 选择方案二更合理. ························12 分

21. **解**：（1）$\because g(x)=xe^{\frac{1}{2}x}-e^x+1$，

$\therefore g'(x)=(\frac{1}{2}x+1)e^{\frac{1}{2}x}-e^x=e^{\frac{1}{2}x}(\frac{1}{2}x+1-e^{\frac{1}{2}x})$. ························1 分

令 $h(x)=\frac{1}{2}x+1-e^{\frac{1}{2}x}$，则 $h'(x)=\frac{1}{2}(1-e^{\frac{1}{2}x})$. ························2 分

当 $x>0$ 时，$h'(x)=\frac{1}{2}(1-e^{\frac{1}{2}x})<0$. ························3 分

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $h(x)<h(0)=0$. ········

$\because e^{\frac{1}{2}x}>0$，$\therefore g'(x)=e^{\frac{1}{2}x}(\frac{1}{2}x+1-e^{\frac{1}{2}x})<0$.

$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，故$g(x)<g(0)=0$.

$\therefore$当$x>0$时，$g(x)<0$. ························5 分

（2）由（1）可知，当$x>0$时，$xe^{\frac{1}{2}x}-e^{x}+1<0$.

令$t=e^{\frac{1}{2}x}>1$，则上式化为$2t\ln t-t^2+1<0$.

$\therefore 2\ln t<t-\frac{1}{t},t>1$. ························7 分

令$t=\sqrt{\frac{i+1}{i}}>1, i\in N^*$得

$\therefore 2\ln\sqrt{\frac{i+1}{i}}<\sqrt{\frac{i+1}{i}}-\sqrt{\frac{i}{i+1}}=\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}}$.

$\therefore \ln\frac{i+1}{i}<\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}},i\in N^*$. ························9 分

$\because \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i+1}{i}=\ln\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)$. ························11 分

$\therefore \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}}>\ln(n+1)$，得证. ························12 分

22. 解：（1）$\because \rho=2\sin\theta$，$\therefore \rho^2=2\rho\sin\theta$ ························1 分

$\because \rho^2=x^2+y^2$，$\rho\sin\theta=y$， ························3 分

$\therefore C$的直角坐标方程为：$x^2+(y-1)^2=1$. ························5 分

（2）由已知可得点A,B的直角坐标为$A(0,1),B(\sqrt{3},1)$. ························6 分

$\because$线段BP的中垂线与直线AP交于点Q，

$\therefore |QB|=|QP|$且$||QB|-|QA||=\pm1$. ························7 分

设$Q(x,y)$，则$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}\pm1$. ························8 分

化简可得点Q的轨迹方程$2x^2-y^2-2\sqrt{3}x+2y=0$. ························10 分

23. 解：（1）$f(x)=2|x+1|-|2x+3|=|2x+2|-|2x+3|$

$\leqslant|(2x+2)-(2x+3)|=1$ ························4 分

$\therefore f(x)$的最大值$m=1$. ························5 分

（注：分段讨论也可求解.）

（2）$\because \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{ab}}$，$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{bc}}$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{ac}}$， ························7 分

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\sqrt{\frac{1}{ab}}+\sqrt{\frac{1}{bc}}+\sqrt{\frac{1}{ac}}$. ························8 分

$\because abc=1$，$\therefore \frac{1}{ab}=c$，$\frac{1}{bc}=a$，$\frac{1}{ac}=b$， ························9 分

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\sqrt{c}+\sqrt{b}+\sqrt{a}$.

当$a=b=c$时等号成立，即原式不等式成立. ························10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。