

秘密★启用前

2023 届“3+3+3” 高考备考诊断性联考卷（一） 理科数学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。在试题卷上作答无效。
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。满分 150 分，考试用时 120 分钟。

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{y | y = 2^x\}$, 则 $A \cap B$ 表示的集合为

- A. $\{-1\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

2. 复数 $z = \frac{3-i}{1+i} - 1$, 则 $|z| =$

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. 2 D. 5

3. 某医疗公司引进新技术设备后，销售收入（包含医疗产品收入和其他收入）逐年翻一番，据统计该公司销售收入情况如图 1 所示，则下列说法错误的是

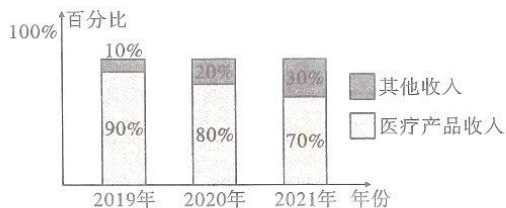


图 1

- A. 该地区 2021 年的销售收入是 2019 年的 4 倍
 B. 该地区 2021 年的医疗产品收入比 2019 年和 2020 年的医疗产品收入总和还要多
 C. 该地区 2021 年其他收入是 2020 年的其他收入的 3 倍
 D. 该地区 2021 年的其他收入是 2019 年的其他收入的 6 倍

4. 我国古代数学名著《九章算术》对立体几何有深入的研究，从其中一些数学用语可见，譬如“阳马”意指底面为矩形，一侧棱垂直于底面的四棱锥。某“阳马”的三视图如图 2 所示，则它的最长侧棱与底面所成角的正切值为

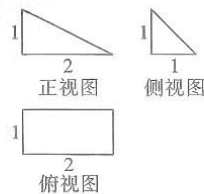


图 2

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1
 C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

5. 已知焦点在坐标轴上且中心在原点的双曲线的一条渐近线方程为 $2y = x$, 若该双曲线过点 $(1, 1)$, 则它的方程为

- A. $4y^2 - x^2 = 3$ B. $4x^2 - y^2 = 3$ C. $2y^2 - x^2 = 1$ D. $2x^2 - y^2 = 1$

6. 已知直线 $(m+2)x+(m-1)y-2m-1=0 (m \in \mathbf{R})$ 与圆 $C: x^2-4x+y^2=0$, 则下列说法错误的是
- A. 对 $\forall m \in \mathbf{R}$, 直线恒过一定点
 B. $\exists m \in \mathbf{R}$, 使直线与圆相切
 C. 对 $\forall m \in \mathbf{R}$, 直线与圆一定相交
 D. 直线与圆相交且直线被圆所截得的最短弦长为 $2\sqrt{2}$
7. 以下关于 $f(x) = \sin x \cos x - \cos^2 x + \frac{1}{2}$ 的命题, 正确的是
- A. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{2\pi}{3})$ 上单调递增
 B. 直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴
 C. 点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一个对称中心
 D. 将函数 $y=f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位, 可得到 $y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x$ 的图象
8. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 且满足 $b-a = 2b \sin^2 \frac{C}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为
- A. 直角三角形
 B. 等边三角形
 C. 直角三角形或等腰三角形
 D. 等腰直角三角形
9. 小明家订了一份牛奶, 送奶人可能在早上 6:30~7:00 之间把牛奶送到小明家, 小明出门去上学的时间在早上 6:50~7:10 之间, 则小明在离开家之前能得到牛奶的概率是
- A. $\frac{1}{12}$
 B. $\frac{2}{3}$
 C. $\frac{7}{8}$
 D. $\frac{11}{12}$
10. 已知符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ 函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = f(1+x), f(x+2) = f(x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$, 则
- A. $\operatorname{sgn}(f(x)) > 0$
 B. $f(\frac{4041}{2}) = 1$
 C. $\operatorname{sgn}(f(2k)) = 0 (k \in \mathbf{Z})$
 D. $\operatorname{sgn}(f(2k)) = |\operatorname{sgn} k| (k \in \mathbf{Z})$
11. 已知直线 l 与曲线 $y=e^x$ 相切, 切点为 P , 直线 l 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A, B, O 为坐标原点. 若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{e}$, 则点 P 的个数是
- A. 1
 B. 2
 C. 3
 D. 4
12. 如图 3, 已知四面体 $ABCD$ 中, $AB=AC=BD=CD=2\sqrt{2}, AD=BC=2$, E, F 分别是 AD, BC 的中点. 若用一个与直线 EF 垂直, 且与四面体的每一个面都相交的平面 α 去截该四面体, 由此得到一个多边形截面, 则该多边形截面面积的最大值为
- A. 1
 B. $\sqrt{2}$
 C. 2
 D. $2\sqrt{2}$

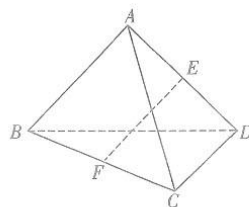


图 3

二、填空题 (本大题共4小题, 每小题5分, 共20分)

13. 已知向量 $a=(1, 3)$, $b=(3, 4)$, 若 $(ma-b) \parallel (a+b)$, 则 $m=$ _____.

14. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6$ 的展开式中 x^2 的系数为 _____.

15. 若 $a = \frac{(1-\log_6 3)^2 + \log_6 2 \cdot \log_6 18}{\log_6 2}$, 则 a 的值为 _____.

16. 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F , 直线 l 过点 F 且与抛物线交于点 M, N (点 N 在 x 轴上方), 点 E 为坐标轴上 F 右侧的一点, 已知 $|NF|=|EF|=3|MF|$, $S_{\triangle MNE}=3\sqrt{3}$, 若点 N 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线上, 则双曲线的离心率为 _____.

三、解答题 (共70分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分12分)

随着人民生活水平的不断提高, “衣食住行” 愈发被人们所重视, 其中对饮食的要求也愈来愈高. 某地区为了解当地餐饮情况, 随机抽取了100人对该地区的餐饮情况进行了问卷调查. 请根据下面尚未完成并有局部污损的频率分布表和频率分布直方图 (如图4) 解决下列问题.

组别	分组	频数	频率
第1组	[50, 60)	14	0.14
第2组	[60, 70)	m	\cdot
第3组	[70, 80)	36	0.36
第4组	[80, 90)	\cdot	0.16
第5组	[90, 100)	4	n
	合计	\cdot	\cdot

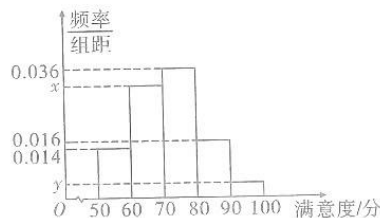


图4

(1) 求 m, n, x, y 的值;

(2) 求中位数;

(3) 若将满意度在80分以上的人群称为“美食客”, 将频率视为概率, 用样本估计总体, 从该地区中随机抽取3人, 记其中“美食客”的人数为 ξ , 求 ξ 的分布列和数学期望.

18. (本小题满分12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, 设其公比为 q , 前 n 项和为 S_n , 并且满足 $a_1+a_5=34$, 8 是 a_2 与 a_4 的等比中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n=n \cdot a_n$, T_n 是 b_n 的前 n 项和, 求使 $T_n-n \cdot 2^{n+1} > -100$ 成立的最大正整数 n 的值.

19. (本小题满分12分)

如图5, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $PD=AD=BD=1$, $AB=\sqrt{2}$.

(1) 求证: 平面 $PBD \perp$ 平面 PBC ;

(2) 试问在线段 PC 上是否存在一点 M , 使得二面角 $M-BD-C$ 的大小为

60° , 若存在求出 $\frac{PM}{MC}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.

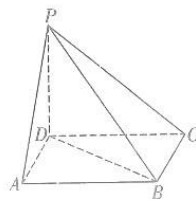


图5

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过点 $(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知直线 $l: y = mx + 2$ 与椭圆交于不同的两点 P, Q , 那么在 x 轴上是否存在点 M , 使 $MP = MQ$ 且 $MP \perp MQ$, 若存在, 求出该直线的方程; 若不存在, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知 $f(x) = \ln x - ax + 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) \leq \frac{1}{2}ax^2 - x$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求整数 a 的最小值.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答, 并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致, 在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}(\sin\theta - \cos\theta) \\ y = \sqrt{2}(\sin\theta + \cos\theta) \end{cases}$, (θ 为参数), 以坐标原

点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求直线 l 和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 从原点 O 引一条射线分别交曲线 C 和直线 l 于 M, N 两点, 求 $\frac{12}{|OM|^2} + \frac{1}{|ON|^2}$ 的最大值.

23. (本小题满分 10 分) 【选修 4-5: 不等式选讲】

已知函数 $f(x) = |x+a| + \left|x - \frac{a}{2}\right|$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 5$ 的解集;

(2) 设 $a > 0, b > 0$ 且 $f(x)$ 的最小值为 m , 若 $m + \frac{3}{2}b = 3$, 求 $\frac{3}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线