数学参考答案

一、单选题

1.D 2.A 3.B 4.C 5.A 6.C 7.B 8.D

二、多选题

9.BC 10.ABC 11.BCD 12.ACD

三、填空题

13. 4 14. 10 **15.** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ **16.** $\sqrt{7}$

17 解: (1)因为$a_{n+1}=2s_n+2$., 所以 $n\ge2$ 时, $a_n=2s_{n-1}+2$,

所以$a_{n+1}-a_n=2(s_n-s_{n-1})=2a_n$, 所以$a_{n+1}=3a_n(n\ge2)$, ...2 分

因为$a_2=2s_1+2=2a_1+2$, ...3 分

又因为a_n为等比数列, 所以$a_2=3a_1$, 所以$a_1=2$, ...4 分

所以$a_n=2\cdot3^{n-1}$, ...5 分

(2)要证 $n>2$ 时, $a_n-b_n>0$, 即证 $n>2$ 时, $2\cdot3^{n-1}>2^{n+1}$,

需证 $n>2$ 时, $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}>2$, ...8 分

因为 $n>2$, 所以$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}>\frac{9}{4}>2$, 所以原不等式成立. ....10 分

18.解: (1) 由正弦定理得$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin B-2\sin C=0$, ...1 分

因为 $B=\pi-A-C$, 所以$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin(A+C)-2\sin C=0$, ...2 分

所以$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin A\cos C-\cos A\sin C-2\sin C=0$,

即$\sqrt{3}\sin A\sin C-\cos A\sin C-2\sin C=0$, ...3 分

又$\sin C\neq0$, 所以$\sqrt{3}\sin A-\cos A=2$, ...4 分

即 $2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=2$, 又 $A\in(0,\pi)$, ...5 分

所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, 所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. ....6 分

(2) 因为$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{2}{3}$, 所以由正弦定理得$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{2}{3}$, ...7 分

设$\angle BAD=\theta$, 则$\angle CAD=120^\circ-\theta$, ...8 分

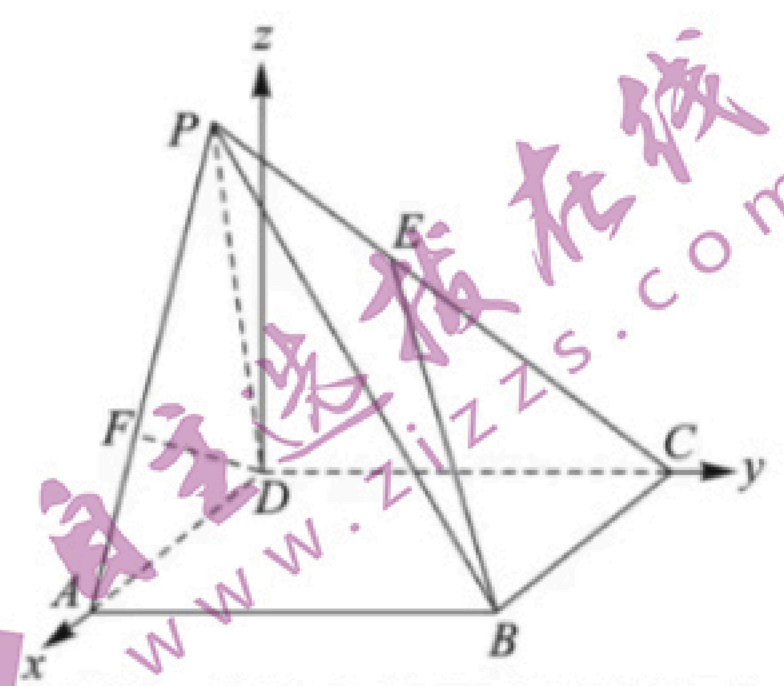
因为 AD 为 BC 边上的中线, 所以$S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ACD}$,

$\frac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\ (120^{\circ}-\theta)$, ...10 分

$3\sin\theta=2\sin\ (120^{\circ}-\theta)$，$3\sin\theta=2\ (\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta)$ ，

所以 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\tan\angle BAD=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ....12 分

19.



(1) 证明：过点 D 作 DF⊥AP,垂足为点 F, ...1 分

因为平面 PAD⊥平面 PAB，平面 PAD∩平面 PAB= AP,所以 DF⊥平面 PAB，............3 分

所以 DF⊥AB, 因为 AD⊥AB，又 AD ∩ DF = D, 所以 AB⊥平面 PAD, ...4 分

因为 AB ⊂ 平面 PAB，所以平面 PAB⊥平面 PAD. ....5 分

(2) 如图，以点 D 为原点，DA 为 X 轴，DC 为 Y 轴建立空间直角坐标系，

则 D(0，0，0)、A（2,0,0）、B（2,2,0）、C（0,2,0），............6 分

设 P（a，0，c）（$c>0$），............7 分

则 E（$\frac{a}{2}$，1，$\frac{c}{2}$）,因为∠PAD= $\frac{\pi}{4}$，所以 $a+c=2$, ...8 分

所以 $\vec{AP}=(a-2,\ 0,\ c)=(-c,\ 0,\ c)$，$\vec{BE}=\left(\frac{a}{2}-2,\ -1,\ \frac{c}{2}\right)=\left(-\frac{c}{2}-1,\ -1,\ \frac{c}{2}\right)$，

因为异面直线 BE 与 PA 所成角为 $\frac{\pi}{6}$，所以 $\cos<\vec{AP}\cdot\vec{BE}>=\dfrac{\frac{c^2}{2}+c+\frac{c^2}{2}}{\sqrt{2}c\cdot\sqrt{(\frac{c}{2}+1)^2+1+\frac{c^2}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

化简得 $c^2+2c-8=0$，解得 $c=2$（$c=-4$ 舍），所以 $a=0$; ....10 分

所以 P(0,0,2), PA ⊥ 平面 ABCD，所以四棱锥 P-ABCD 的体积为 $\frac{8}{3}$. ....12 分

20.解：顺时针移动到下一个顶点的概率为 $\frac{1}{3}$，逆时针移动到下一个顶点的概率为 $\frac{2}{3}$

(1) 投掷 2 次骰子后，该点恰好回到 A 点的概率为：$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$； …………4 分

(2) X = 0、1、2； …………5 分

P（X=0） $=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{81}$； …………6 分

P（X=1） $=\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}\times2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\times3+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{31}{81}$； …………8 分

P（X=2） $=\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}\times2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\times2+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\times3=\frac{46}{81}$； …………10 分

所有 X 得分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{4}{81}$	$\frac{31}{81}$	$\frac{46}{81}$

…………11 分

所以 $EX=\frac{4}{81}\times0+\frac{31}{81}\times1+\frac{46}{81}\times2=\frac{41}{27}$. …………12 分

21.(1)证明：f(x)定义域为（0，+∞）， …………1 分

因为 $f'(x)=\ln x+\frac{x-4}{x}+2x+a=\ln x-\frac{4}{x}+2x+a+1$,

所以 $f'(x)$在定义域内单调递增， 且值域为 R，

所以 $f'(x)$有唯一的零点$x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=0$， …………3 分

当 x∈（0，x_0）时，$f'(x)<0$，f(x)单调递减；当 x∈（x_0，+∞）时，$f'(x)>0$，f(x)单调递增，所以 f(x)有唯一的极值点. …………5 分

（2）由（1）知，f(x)在 $x=x_0$取得极小值点，也是最小值点， …………6 分

由 $f'(x_0)=0$ 得 $a=-\ln x_0-2x_0+\frac{4}{x_0}-1$， …………7 分

所以 $f(x_0)=(x_0-4)\ln x_0+x_0^2+ax_0-2$

$=(x_0-4)\ln x_0+x_0^2+\left(-\ln x_0-2x_0+\frac{4}{x_0}-1\right)x_0-2$

$=-4\ln x_0-x_0^2-x_0+2=-4\ln x_0-(x_0+2)(x_0-1)$， …………8 分

当 $0<x_0\le1$ 时，$-4\ln x_0\ge0$，$-(x_0+2)(x_0-1)\ge0$，所以 $f(x_0)\ge0$；

当$x_0>1$时，$-4\ln x_0<0$，$-(x_0+2)(x_0-1)<0$，所以 $f(x_0)<0$，

因为 $f(x_0) \ge 0$，所以 $0< x_0 \le 1$.　　　　　　　　　　　　…………10 分

设 $h(x) = -\ln x - 2x + \frac{4}{x} - 1 (0 < x \le 1)$，因为 $h(x)$ 单调递减，　　　　…………11 分

所以 $a = h(x_0) \ge h(1) = 1$，即 $a \ge 1$.　　　　　　　　　　　　…………12 分

22.解：（1）设直线 AB 方程为 $x = my + 3$，$A(\frac{y_1^2}{2p}, y_1)$，$B(\frac{y_2^2}{2p}, y_2)$，

联立得 $\begin{cases} y^2=2px \\ x=my+3 \end{cases}$，消 x 得 $y^2 - 2pmy - 6p = 0$，

得 $y_1 + y_2 = 2pm$，$y_1y_2 = -6p$，　　　　　　　　　　　　…………2 分

因为 AO⊥BO，所以 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} + y_1y_2 = 0$，

即 $\frac{(-6p)^2}{4p^2} - 6p = 0$，$p = \frac{3}{2}$，　　　　　　　　　　　　…………4 分

所以抛物线的解析式为：$y^2 = 3x$.　　　　　　　　　　　　…………5 分

（2））设 $M(\frac{y_3^2}{3}, y_3)$，$N(\frac{y_4^2}{3}, y_4)$，$P(\frac{y_0^2}{3}, y_0)(y_0^2 \ne y_3^2 \ne y_4^2)$，　　　　…………6 分

因为 M、P、C 三点共线，所以 $\frac{y_0-0}{\frac{y_0^2}{3} - (-2)} = \frac{y_0-y_3}{\frac{y_0^2}{3} - \frac{y_3^2}{3}}$，即 $y_0y_3 = 6$，　　　①…………7 分

因为 N、P、D 三点共线，所以 $\frac{y_0-2}{\frac{y_0^2}{3}-2} = \frac{y_0-y_4}{\frac{y_0^2}{3} - \frac{y_4^2}{3}}$，即 $y_0y_4 - 2(y_0+y_4) = -6$，②…………8 分

直线 MN 方程为：$\frac{y-y_3}{x-\frac{y_3^2}{3}} = \frac{y_4-y_3}{\frac{y_4^2}{3} - \frac{y_3^2}{3}}$，即 $3x - (y_3+y_4)y + y_3y_4 = 0$　　③…………9 分

由①②得 $\frac{6}{y_3} \cdot y_4 - 2\left(\frac{6}{y_3} + y_4\right) = -6$，即 $y_3y_4 = 3(y_3+y_4) - 6$，　　　…………10 分

代入③得 $3x - (y_3+y_4)y + 3(y_3+y_4) - 6 = 0$，所以直线 MN 过定点 R（2，3）…….12 分