

合肥八中 2023 届最后一卷

数 学

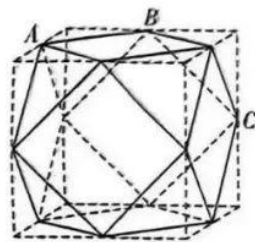
考生注意：

1. 试卷结构：分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)；试卷分值：150 分，考试时间：120 分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答案区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
3. 所有答案均要答在答题卡上，否则无效。考试结束后只交答题卡。

第 I 卷(选择题共 60 分)

一、单选题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。每小题只有一个正确答案，请把正确答案涂在答题卡上)

1. 已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x}{x+1} < 1, x \in \mathbf{R} \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbf{N} \mid \frac{1}{2} \leq 2^x \leq 4 \right\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
 A. $\{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$ B. $\{x \mid -1 < x \leq 2\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
2. 已知复数 $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 - ai (a \in \mathbf{R})$, 且 $z_1 \cdot \bar{z}_2$ 为纯虚数, 则 $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = (\quad)$
 A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. 1 D. $\sqrt{6}$
3. “阿基米德多面体”也称为半正多面体(semi-regular solid), 是由边数不全相同的正多边形为面围成的多面体, 它体现了数学的对称美. 如图, 它是由正方体沿交于一顶点的三条棱的中点截去一个三棱锥, 共截去八个三棱锥得到. 已知 $AB = \sqrt{2}$, 若该半正多面体的表面积为 S , 体积为 V , 则 $\frac{S}{V}$ 为 (\quad)
 A. $\frac{3\sqrt{3}+9}{5}$ B. $\frac{3\sqrt{3}+12}{7}$ C. 2 D. $\frac{3}{2}$
4. 若 $f(x) = \ln \left| \frac{1}{2x-1} + m \right| + n$ 为奇函数, 则 $f(1) = (\quad)$
 A. 3 B. 2 C. $\ln 3$ D. $\ln 2$
5. 有 4 名女生 2 名男生参加学校组织的演讲比赛, 现场抽签决定比赛顺序, 已知男生甲比男生乙先出场, 则两位男生相邻的概率是 (\quad)
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{3}{5}$
6. 在平面直角坐标系中, P 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的动点, 定点 $A(0, 4)$. 现将坐标平面沿 x 轴翻折成平面角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的二面角, 此时点 A 翻折至 A' , 则 A', P 两点间距离的取值范围是 (\quad)
 A. $[3, \sqrt{17}]$ B. $[3, \sqrt{21}]$ C. $[\sqrt{10}, \sqrt{17}]$ D. $[\sqrt{10}, \sqrt{21}]$
7. 已知 $2e^{a-2} = a$, $3e^{b-3} = b$, $2e^{c-3} = c$, 其中 $a, b, c \in (0, 1)$, 则 (\quad)
 A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$



第 II 卷(非选择题共 90 分)

三、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 已知 $|a|=1$, $|b|=2$, $a \cdot b = -\frac{2}{3}$, 则向量 a 在向量 b 上的投影向量为_____.

14. $(x - \frac{1}{x} + 1)^7$ 的展开式中的常数项为_____.

15. 已知正项数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , 且满足 $(a_n + 1)^2 = 4(S_n + 1)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{a_n a_{n+1}}$, 其前 n 项和 T_n , 设 $\lambda \in \mathbf{N}$, 若 $T_n < \lambda$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 则 λ 的最小值是_____.

16. 设 $k, b \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $\ln(x-1) - b \leq x(k-1)$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 则 $\frac{b-2k+1}{k-1}$ 的最小值是_____.

四、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本题满分 10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 请从以下三个条件中选择一个完成解答.

① 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2 的单调递减的等比数列, 且 $8a_1, 9a_2, 9a_3$ 成等差数列;

② $S_n = 6 - 2a_n$;

③ $a_1 + 3a_2 + 3^2 a_3 + \dots + 3^{n-1} a_n = 2^{n+1} - 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{\frac{n a_n}{3}\}$ 的前 n 项和 T_n .



18. (本题满分 12 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $2a \cos B = 2c + b$.

(1) 求 A ;

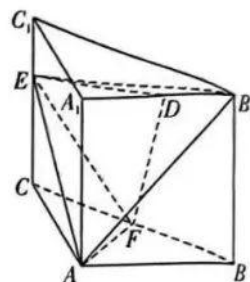
(2) 若 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线, 且 $AD=1$, 求 $S_{\triangle ABC}$ 的最小值.

19. (本题满分 12 分) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 且 $\angle ACB = \frac{\pi}{6}$, $AB=AC=2$, 又侧棱 $BB_1=4\sqrt{2}$, 面对角线 $A_1C=A_1B=6$, 点 D, F 分别是棱 A_1B_1, CB 的中点,

$$\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{AC_1}.$$

(1) 证明: $B_1E \perp$ 平面 AEF ;

(2) 求二面角 $A-EF-D$ 的正切值.



20. (本题满分 12 分) 当前移动网络已融入社会生活的方方面面, 深刻改变了人们的沟通、交流乃至整个生活方式. 4G 网络虽然解决了人与人随时随地通信的问题, 但随着移动互联网快速发展, 其已难以满足未来移动数据流量暴涨的需求. 而 5G 作为一种新型移动通信网络, 不但可以解决人与人的通信问题, 而且还可以为用户提供增强现实、虚拟现实、超高清(3D)视频等更加

身临其境的极致业务体验,更重要的是还可以解决人与物、物与物的通信问题,从而满足移动医疗、车联网、智能家居、工业控制、环境监测等物联网应用需求.为更好的满足消费者对5G网络的需求,中国电信在某地区推出了六款不同价位的流量套餐,每款套餐的月资费 x (单位:元)与购买人数 y (单位:万人)的数据如下表:

套餐	A	B	C	D	E	F
月资费 x (元)	38	48	58	68	78	88
购买人数 y (万人)	16.8	18.8	20.7	22.4	24.0	25.5

对数据作初步的处理,相关统计量的值如下表:

$\sum_{i=1}^6 v_i \omega_i$	$\sum_{i=1}^6 v_i$	$\sum_{i=1}^6 \omega_i$	$\sum_{i=1}^6 v_i^2$
75.3	24.6	18.3	101.4

其中 $v_i = \ln x_i, \omega_i = \ln y_i$,且绘图发现,散点 $(v_i, \omega_i) (1 \leq i \leq 6)$ 集中在一条直线附近.

(1)根据所给数据,求出 y 关于 x 的回归方程;

(2)已知流量套餐受关注度通过指标 $T(x) = \frac{x+36}{y}$ 来测定,当 $T(x) \in \left(\frac{85}{7e}, \frac{68}{5e}\right)$ 时相应的流量套餐受大众的欢迎程度更高,被指定为“主打套餐”.现有一家四口从这六款套餐中,购买不同的四款各自使用.记四人中使用“主打套餐”的人数为 X ,求随机变量 X 的分布列和期望.

附:对于一组数据 $(v_1, \omega_1), (v_2, \omega_2), \dots, (v_n, \omega_n)$,其回归方程 $\omega = bv + a$ 的斜率和截距的最小二

乘估计值分别为 $b = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v}) \cdot (\omega_i - \bar{\omega})}{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2}$, $a = \bar{\omega} - b \bar{v}$.



21. (本题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = e^x + \frac{a}{e^x}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $f(x) = e^x + \frac{a}{e^x}$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线恰好经过点 $(3, 2)$, 且对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) \geq 2 + mx^2$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

(本题满分 12 分)

(1) 若椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0, t > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且被直线 $y = x$ 截得的线段长为 $\frac{4\sqrt{10}}{5}$, 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = t_1 (a > b > 0)$, $C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = t_2 (a > b > 0)$, 其中 $t_1 = 2t_2 (t_2 > 0)$, 若点 P 是 C_2 上的任意一点, 过点 P 作 C_2 的切线交 C_1 于 A, B 两点, Q 为 C_1 上异于 A, B 的任意一点, 且满足 $\vec{OQ} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB}$, 问: $\lambda^2 + \mu^2$ 是否为定值? 若为定值, 求出该定值; 否则, 说明理由.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 ([网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

自主选拔在线
zizzsw

 自主选拔在线
微信号：zizzsw

 自主选拔在线
微信号：zizzsw

 自主选拔在线
微信号：zizzsw

 自主选拔在线
微信号：zizzsw