2023 年春季学期高二年级 7 月质量检测 · 数学

参考答案、提示及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	C	B	A	C	D
题号	9	10	11	12				
答案	ACD	ABD	ABC	BD				

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.【答案】B

【解析】易知 $A=[1,+\infty)$，则 $B=(-\infty,2]$，则 $A\cap B=[1,2]$．故选 B．

2.【答案】A

【解析】易知 $z=\frac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{1+3\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$，所以 z 对应的点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，在第一象限．故选 A．

3.【答案】D

【解析】由题意可知，二项式系数最大为 $C_6^3=20$，对应项为 $20\cdot(x^2)^3\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^3=160x^3$，即系数为 160．故选 D．

4.【答案】C

【解析】易知圆台的体积 $V_1=\frac{2}{3}(4\pi+\pi+\sqrt{4\pi\cdot\pi})=\frac{14\pi}{3}$，半球的体积 $V_2=\frac{2}{3}\pi$，所以剩余部分的体积 $V=V_1-V_2=4\pi$．故选 C．

5.【答案】B

【解析】因为 $\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，所以 $\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}=2\cos\theta$，

所以 $2\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta=1$，即 $\sin 2\theta+\cos 2\theta=0$，

所以 $\tan 2\theta=-1=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$，解得 $\tan\theta=1+\sqrt{2}$ 或 $\tan\theta=1-\sqrt{2}$（舍去）．故选 B．

6.【答案】A

【解析】因为 $a,b>0$，且 $a+b=6$，所以 $a\in(0,6)$，所以 x,y 呈正相关，即 $r>0$，由散点图可知，当 $a<2$ 时，a 越大，x,y 相关性越强，即 r 变大，当 $a>2$ 时，a 越大，x,y 相关性越弱，即 r 变小．故选 A．

7.【答案】C

【解析】联立 C 与 M 的方程 $\begin{cases}y^2=2x,\\(x-3)^2+y^2=8,\end{cases}$ 消去 y，整理得 $x^2-4x+1=0$，

则 $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=1$，所以 $y_1y_2=2\sqrt{x_1x_2}=2$，

所以 $y_1+y_2=\sqrt{y_1^2+y_2^2+2y_1y_2}=\sqrt{2(x_1+x_2)+2y_1y_2}=2\sqrt{3}$，

易知 $P'(x_1,-y_1)$，则 $k_{P'Q}=\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}=\frac{2(y_2+y_1)}{y_2^2-y_1^2}=\frac{2}{y_2-y_1}$，

所以 $k_{P'Q}=\frac{2}{\sqrt{(y_2+y_1)^2-4y_1y_2}}=\frac{2}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2-8}}=1$．故选 C．

8.【答案】D

【解析】设 $P(X=1)=P(Y=-1)=a$，$P(X=2)=P(Y=-2)=b$，则 $a+b=1$，

易知 XY 的可能取值为 $-4,-2,-1$，

且 $P(XY=-1)=a^2$，$P(XY=-2)=2ab$，$P(XY=-4)=b^2$，

所以 $E(XY)=-a^2-4ab-4b^2=-(a+2b)^2=-(1+b)^2=-2$，

解得 $b=\sqrt{2}-1$，则 $a=2-\sqrt{2}$，

所以 $D(XY)=(-1+2)^2\cdot a^2+(-4+2)^2\cdot b^2=a^2+4b^2=18-12\sqrt{2}$. 故选 D.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.**【答案】**ACD

【解析】若 $d<-4$，可得 $S_5=5(8+2d)<0$，即 A 正确；

若 $a_3+a_4>0$，则 $2a_1+5d=16+5d>0$，即 $d>-\dfrac{16}{5}$，取 $d=-3$，则 $S_7=7a_4=7(8-9)<0$，即 B 错误；

若 $S_5\geqslant S_n$，则 $a_5\geqslant 0\geqslant a_6$，所以 $8+4d\geqslant 0\geqslant 8+5d$，所以 $-2\leqslant d\leqslant -\dfrac{8}{5}$，即 C 正确；

若 $d>-1$，则 $a_9=8+8d>0$，所以 $S_9=9\times 8+\dfrac{9\times(9-1)}{2}d>72-36=36$，即 D 正确. 故选 ACD.

10.**【答案】**ABD

【解析】由圆 C 的方程可知圆 C 的圆心坐标为 $(3,1)$，即 A 正确；

当 $r=2$ 时，圆 M：$(x-m)^2+(y-2m)^2=4$，此时易知 $|MC|\geqslant\sqrt{5}>2-1$，所以有 $MC=\sqrt{(m-3)^2+(2m-1)^2}<3$，解得 $1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}<m<1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，即 B 正确；

因为 $MA\perp CA$，且 $r=3$，所以 $|CM|^2=3^2+1^2=10$，即 $(m-3)^2+(2m-1)^2=10$，解得 $m=0$ 或 $m=2$，即 C 错误；

因为圆 C 的直径为 2，所以当 $|AB|=2$ 时，AB 为圆 C 的直径，所以 $r^2=|MC|^2+1=(m-3)^2+(2m-1)^2+1=5m^2-10m+11=5(m-1)^2+6$，当且仅当 $m=1$ 时，$r_{\min}=\sqrt{6}$，即 D 正确. 故选 ABD.

11.**【答案】**ABC

【解析】因为 $P(\bar{A})=P(\bar{A}B)+P(\bar{A}\bar{B})$，且 $P(B|A)+P(\bar{B}|\bar{A})=1$，所以 $P(B|A)=1-P(\bar{B}|\bar{A})=1-\dfrac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}=\dfrac{P(\bar{A})-P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}=\dfrac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=P(B|\bar{A})$，即 A 正确；

因为 $P(B|A)=P(B|\bar{A})$，所以 $\dfrac{P(BA)}{P(A)}=\dfrac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}=\dfrac{P(B)-P(BA)}{1-P(A)}$，去分母，整理得 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，所以 A,B 相互独立，即 B 正确；

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$，即 C 正确；

$P(A\bar{B}|\bar{B})=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$，即 D 错误. 故选 ABC.

12.**【答案】**BD

【解析】因为 $b\ln b+a=\dfrac{ab}{e^a}$，所以 $\ln b+\dfrac{a}{b}-\dfrac{a}{e^a}=0$，设 $f(b)=\ln b+\dfrac{a}{b}-\dfrac{a}{e^a}$，

则 $f'(b)=\dfrac{1}{b}-\dfrac{a}{b^2}=\dfrac{b-a}{b^2}$，令 $f'(b)=0$，解得 $b=a$，

易知 $f(b)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(b)\geqslant f(a)=\ln a+1-\dfrac{a}{e^a}$，

根据熟知不等式 $e^a>a$，所以当 $a\geqslant 1$ 时，$f(b)\geqslant f(a)=\ln a+1-\dfrac{a}{e^a}=\ln a+\dfrac{e^a-a}{e^a}>0$，

所以 $f(b)=0$ 无解，不符题意，

当 $a<1$ 时，因为 $f(1)=a-\dfrac{a}{e^a}=\dfrac{a}{e^a}(e^a-1)>0$，所以 $f(b)>0$ 对任意 $b\geqslant 1$ 均成立，

则应有 $b<1$，且当 $a=\dfrac{1}{e}$ 时，$f(b)_{\min}=f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e^{\frac{1}{e}+1}}<0$，

此时存在 $b\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，使得 $f(b)=0$，

综上，$a<1$，$b<1$. 故选 BD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.【答案】2

【解析】由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，有 $t^2+4(1-t)=0$，可得 $t=2$.

14.【答案】1440

【解析】除 A,B 外还有 5 个人，全排列为 A_5^5 种，又由 A,B 不相邻，且不排两端，故只能插入 4 个空，有 A_4^2 种，故共有 $A_5^5A_4^2=1440$(种).

15.【答案】$\frac{350}{9}$

【解析】设该人在三次游戏中累计积分不低于 100 分且不足 150 分为事件 B，

则 $P(B)=C_3^1(1-3p)^2\cdot 3p=9(9p^3-6p^2+p)$，

设 $f(p)=9p^3-6p^2+p$，则 $f'(p)=27p^2-12p+1=(3p-1)(9p-1)$，

令 $f'(p)=0$，解得 $p=\frac{1}{9}$ 或 $p=\frac{1}{3}$(舍去)，

设该人一次游戏所得积分为变量 X，易知 $X=10,20,50$，

所以 $E(X)=10p+20\times 2p+50\times(1-3p)=50-100p=\frac{350}{9}$.

16.【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$，不妨设椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，则可设直线 l：$x=my-1\ (m>0)$，

其中 m 是直线 l 的斜率的倒数，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，其中 $y_1<0<y_2$，

与椭圆 C 联立 $\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 x，整理得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

所以 $y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$，

所以 $r_1=\frac{2c\cdot(-y_1)}{2(a+c)}=-\frac{y_1}{3}$，$r_2=\frac{2c\cdot y_2}{2(a+c)}=\frac{y_2}{3}$，$r_3=\frac{2c\cdot(y_2-y_1)}{4a}=\frac{y_2-y_1}{4}$，

因为 $r_1+r_3=2r_2$，所以 $\frac{y_2-y_1}{4}-\frac{y_1}{3}=\frac{2y_2}{3}$，整理得 $-7y_1=5y_2$，

又 $y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$，所以 $y_1=\frac{-15m}{3m^2+4}$，$y_2=\frac{21m}{3m^2+4}$，

所以 $y_1y_2=\frac{-15\times 21m^2}{(3m^2+4)^2}=\frac{-9}{3m^2+4}$，解得 $m=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以直线 l 的斜率 $k=\frac{1}{m}=2\sqrt{2}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.【答案】(1)$AB=\sqrt{19}$　(2)$3\sqrt{17}+3$

【解析】(1)不妨设 $\angle ACB=\angle ACD=\theta\left(\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$，

则在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理可知，$\cos\theta=\frac{AC^2+CD^2-AD^2}{2AC\cdot CD}=\frac{1}{4}$，…………………………………………… 2 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可知，$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\theta$，

所以 $AB^2=9+16-2\times 4\times 3\times\frac{1}{4}=19$，即 $AB=\sqrt{19}$；…………………………………………………… 5 分

(2)因为 $\cos B=\frac{3}{5}$，所以 $\sin B=\frac{4}{5}$，所以 $\sin\angle BAC=\sin(B+\theta)=\frac{4}{5}\cos\theta+\frac{3}{5}\sin\theta$，……………… 6 分

在$\triangle ABC$中，由正弦定理可知，$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$，

所以$\dfrac{4}{\frac{4}{5}}=\dfrac{BC}{\frac{4}{5}\cos\theta+\frac{3}{5}\sin\theta}$，所以$BC=4\cos\theta+3\sin\theta$，…… 7 分

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BC\cdot\sin\theta=2(4\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta)$，…… 8 分

已知在$\triangle ACD$中，$CD=2AC\cdot\cos\theta=8\cos\theta$，所以$S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot CD\cdot\sin\theta=16\sin\theta\cos\theta$，…… 9 分

所以四边形$ABCD$的面积$S=2(4\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta)+16\sin\theta\cos\theta=12\sin 2\theta-3\cos 2\theta+3$，

所以$S=\sqrt{12^2+3^2}\sin(2\theta+\varphi)+3\leqslant\sqrt{153}+3=3\sqrt{17}+3$. …… 10 分

18.【答案】(1)10 (2)有 99.9%的把握认为高三学生课余学习时间超过两小时跟学生成绩有关 (3)分布列见解析；$E(X)=2$

【解析】(1)由题意可得高三 12 个班级共抽取 120 名，

所以$40+x+10+3x-10+40=120$，解得$x=10$；…… 3 分

(2)利用列联表可得$\chi^2=\dfrac{120\times(40\times40-20\times20)^2}{60\times60\times60\times60}=\dfrac{40}{3}\approx13.333>10.828$，

所以有 99.9%的把握认为高三学生课余学习时间超过两小时跟学生成绩有关；…… 6 分

(3)这 6 人中课余学习时间超过两小时的人数为$6\times\dfrac{40}{40+20}=4$，课余学习时间不超过两小时的人数为 2，…… 7 分

X的取值为 1，2，3，…… 8 分

有$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$；…… 9 分

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\dfrac{3}{5}$；…… 10 分

$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$. …… 11 分

故X的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$E(X)=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{5}=2$. …… 12 分

19.【答案】(1)$S_n=2^n$ (2)$T_n=\dfrac{7}{2}-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$

【解析】(1)因为$S_{n+1}^2=3S_n^2+a_{n+1}\cdot S_n$，所以$S_{n+1}^2=3S_n^2+(S_{n+1}-S_n)\cdot S_n$，…… 2 分

整理得$S_{n+1}^2-S_{n+1}S_n-2S_n^2=0$，即$(S_{n+1}+S_n)(S_{n+1}-2S_n)=0$，…… 4 分

因为数列$\{a_n\}$的各项均为正数，所以$S_n>0$，所以$S_{n+1}=2S_n$，…… 6 分

又$S_1=a_1=2$，所以$S_n=2^n$；

(2)由(1)可知，$S_n=2^n$，所以当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}$，

又当$n=1$时，$a_1=2$，所以$a_n=\begin{cases}2,n=1,\\2^{n-1},n\geqslant2,\end{cases}$ …… 7 分

则当$n=1$时，$T_n=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$，

当$n\geqslant2$时，$T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$，则$2T_n=3+\dfrac{3}{2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-2}}$，

两式相减，可得$T_n=\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\frac{1}{2^{n-2}}}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^{n-1}}=\dfrac{7}{2}-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$，…… 11 分

$T_1=\frac{1}{2}$满足上式，所以 $T_n=\frac{7}{2}-\frac{n+2}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$．…………………………………………………… 12 分

20.【答案】(1)$AP=4\sqrt{2}$　(2)$\frac{\sqrt{10}}{5}$

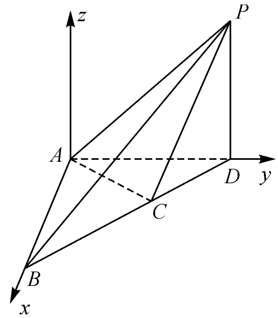
【解析】(1)如图，作 $PD\perp BC$，垂足为 D，连接 AD，

因为平面 $PBC\perp$平面 ABC，$PD\perp BC$，

平面 $PBC\cap$平面 $ABC=BC$，且 $PD\subset$平面 PBC，

所以 $PD\perp$平面 ABC，因为 $AD\subset$平面 ABC，所以 $PD\perp AD$，

因为 $AB\subset$平面 ABC，所以 $PD\perp AB$，…………………………………………… 2 分



又 $AB\perp AP$，$AP\cap AD=A$，且 AP，$AD\subset$平面 PAD，

所以 $AB\perp$平面 PAD，

因为 $AD\subset$平面 PAD，所以 $AB\perp AD$，

所以二面角 $P-AB-C$ 的平面角为$\angle PAD$，……………………………………… 4 分

即$\angle PAD=45^\circ$，

因为 $AB=4\sqrt{3}$，$AC=2\sqrt{3}$，$AC\perp BC$，

所以$\angle BAC=60^\circ$，所以$\angle DAC=30^\circ$，即 $AD=4$，

所以 $AP=\sqrt{2}AD=4\sqrt{2}$；…………………………………………………………… 6 分

(2)如图，建立空间直角坐标系，则 $B(4\sqrt{3},0,0)$，$C(\sqrt{3},3,0)$，$P(0,4,4)$，…………………………… 7 分

所以$\overrightarrow{AB}=(4\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},3,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,4,4)$，

设平面 ABP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=4\sqrt{3}x_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=4y_1+4z_1=0,\end{cases}$

取 $y_1=-1$，则 $x_1=0$，$z_1=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,-1,1)$，………………………………………………… 9 分

设平面 ACP 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}x_2+3y_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=4y_2+4z_2=0,\end{cases}$

取 $x_2=\sqrt{3}$，则 $y_2=-1$，$z_2=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,1)$，…………………………………… 11 分

设锐二面角 $B-AP-C$ 为 θ，

所以 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|1+1|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{3+1+1}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$．…………………………………………… 12 分

21.【答案】(1)$\frac{x^2}{4}-y^2=1$　(2)$3x_1x_2-10(x_1+x_2)=-12$，$\frac{k_2}{k_1}=-2$

【解析】(1)由题意可知，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

因为$|AB|=2a$，所以 $k=0$，$m=\sqrt{3}$时，$|MN|=4a$，……………………………………………… 1 分

所以该双曲线经过点$(2a,\sqrt{3})$，即$\frac{(2a)^2}{a^2}-\frac{3}{b^2}=1$，解得 $b=1$，……………………………………… 3 分

又 $a^2+b^2=c^2$，所以 $a=2$，$c=\sqrt{5}$，

即双曲线 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$；…………………………………………………………… 4 分

(2)当 $m=-6k$ 时，直线 l 的方程为 $y=k(x-6)$，

联立方程$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-y^2=1,\\ y=k(x-6),\end{cases}$消去 y 后整理为$(4k^2-1)x^2-48k^2x+144k^2+4=0$，

有 $x_1+x_2=\frac{48k^2}{4k^2-1}$，$x_1x_2=\frac{144k^2+4}{4k^2-1}$，…………………………………………………… 6 分

有 $3x_1x_2-10(x_1+x_2)=\frac{3(144k^2+4)}{4k^2-1}-\frac{480k^2}{4k^2-1}=\frac{12-48k^2}{4k^2-1}=\frac{12(1-4k^2)}{4k^2-1}=-12$，……………………… 8 分

有 $k_2=\dfrac{y_2}{x_2-2}=\dfrac{k(x_2-6)}{x_2-2}$，$k_1=\dfrac{y_1}{x_1+2}=\dfrac{k(x_1-6)}{x_1+2}$，

有 $\dfrac{k_2}{k_1}=\dfrac{\dfrac{k(x_2-6)}{x_2-2}}{\dfrac{k(x_1-6)}{x_1+2}}=\dfrac{(x_2-6)(x_1+2)}{(x_1-6)(x_2-2)}=\dfrac{x_1x_2-6x_1+2x_2-12}{x_1x_2-2x_1-6x_2+12}=\dfrac{x_1x_2-6x_1+2x_2+3x_1x_2-10(x_1+x_2)}{x_1x_2-2x_1-6x_2-3x_1x_2+10(x_1+x_2)}=$

$\dfrac{4x_1x_2-16x_1-8x_2}{-2x_1x_2+8x_1+4x_2}=\dfrac{2(x_1x_2-4x_1-2x_2)}{-(x_1x_2-4x_1-2x_2)}=-2$，

故 $3x_1x_2-10(x_1+x_2)=-12$，$\dfrac{k_2}{k_1}=-2$. …………………………………………………………………… 12 分

22.【答案】(1)详解见解析　(2)略

【解析】(1) $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x-a}{x^2}$，…………………………………………………………………………………… 1 分

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增，增区间为 $(0,+\infty)$，没有减区间；…………………… 2 分

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，可得 $x>a$，此时函数 $f(x)$ 的减区间为 $(0,a)$，增区间 $(a,+\infty)$；………… 3 分

(2)令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}(t>1)$，由 $f(x_1)=f(x_2)=0$，有 $\dfrac{a}{x_1}+\ln x_1+a-2=\dfrac{a}{x_2}+\ln x_2+a-2$，可得 $a=\dfrac{x_1x_2\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}$，…
…… 4 分

曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_1$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{x_1-a}{x_1^2}(x-x_1)$，

曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_2$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{x_2-a}{x_2^2}(x-x_2)$，………………………………………………… 5 分

联立两条切线方程，消去 y，有 $\dfrac{x_1-a}{x_1^2}(x-x_1)=\dfrac{x_2-a}{x_2^2}(x-x_2)$，

有 $\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{a}{x_1^2}\right)x-\left(1-\dfrac{a}{x_1}\right)=\left(\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{a}{x_2^2}\right)x-\left(1-\dfrac{a}{x_2}\right)$，

有 $\left[\left(\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}\right)+a\left(\dfrac{1}{x_1^2}-\dfrac{1}{x_2^2}\right)\right]x=a\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right)$，

有 $\left(\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}\right)\left[1-a\left(\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_1}\right)\right]x=a\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right)$，

有 $\left[a\left(\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_1}\right)-1\right]x=a$，即 $\left[a\left(\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_1}\right)-1\right]m=a$，…………………………………………… 8 分

可得 $\dfrac{a}{m}=a\left(\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_1}\right)-1$，代入 $a=\dfrac{x_1x_2\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}$，

有 $\dfrac{a}{m}=\dfrac{x_1x_2\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}\left(\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_1}\right)-1=\dfrac{(x_1+x_2)\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}-1=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}-1$，……………………………… 10 分

要证 $m<a\Leftrightarrow\dfrac{a}{m}>1\Leftrightarrow\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}-1>1\Leftrightarrow\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}>0$，

令 $g(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}(x\geqslant 1)$，有 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，

可知函数 $g(x)$ 单调递增，由 $g(1)=0$，可知当 $t>1$ 时，$\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}>0$，

故有 $m<a$. …… 12 分