银川一中、昆明一中 2023 届高三联合考试一模

数学（理科）

本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|1\le x\le 3\}$，$B=\{x|x^2-2x>0\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $(2,3]$　　B. $[1,2)$　　C. $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$　　D. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据一元二次不等式解法求出 B 集合，利用集合并集运算法则即可求解.

【详解】依题意知，

由 $x^2-2x>0$，解得：$x<0$ 或 $x>2$，

即 $B=\{x\,|\,x<0$ 或 $x>2\}$，又 $A=\{x|1\le x\le 3\}$

所以 $A\cup B=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$.

故选：C.

2. 若向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{7}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}$ 结合数量积的运算律计算即可.

【详解】因为 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2\times\frac{1}{2}=1$，

则 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{1+4+2}=\sqrt{7}$.

故选：D.

3. 已知 $1+\mathrm{i}$ 是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0(p,q\in\mathbf{R})$ 的一个根，则复数 $p+q\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】根据一元二次方程的复数根为共轭复数，再结合韦达定理可求得 p,q，再根据复数的几何意义即可得解.

【详解】因为 $1+\mathrm{i}$ 是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0(p,q\in\mathbf{R})$ 的一个根，

所以方程的另外一个根为 $1-\mathrm{i}$，

则$1+\mathrm{i}+1-\mathrm{i}=-p,(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=q$，

所以$p=-2,q=2$，

所以$p+q\mathrm{i}=-2+2\mathrm{i}$在复平面内对应的点位于第二象限.

故选：B.

4. 南宋数学家在《详解九章算法》和《算法通变本末》中提出了一些新的垛积公式，所讨论的高阶等差数列与一般等差数列不同，高阶等差数列中前后两项之差并不相等，但是逐项差数之差或者高次差成等差数列.现有高阶等差数列，其前 7 项分别为 1，2，4，7，11，16，22，则该数列的第 20 项为（　　）

A. 172　　　　B. 183　　　　C. 191　　　　D. 211

【答案】C

【解析】

【分析】构造数列$\{a_{n+1}-a_n\}$，并利用等差数列的性质即可求得原数列的第 20 项为 191

【详解】高阶等差数列$\{a_n\}$： 1，2，4，7，11，16，22，L ，

令$b_n=a_{n+1}-a_n$，则数列$\{b_n\}$：1，2，3，4，5，6，L ，

则数列$\{b_n\}$为等差数列，首项$b_1=1$，公差$d=1$，$b_n=n$，则$a_{n+1}-a_n=n$

则$a_{20}=(a_{20}-a_{19})+(a_{19}-a_{18})+(a_{18}-a_{17})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=(19+18+17+\cdots+1)+1=\dfrac{19(19+1)}{2}+1=191$

故选：C

5. 设$\sin(\dfrac{\pi}{4}+\theta)=\dfrac{1}{3}$，则$\sin 2\theta=$

A. $-\dfrac{7}{9}$　　　　B. $-\dfrac{1}{9}$　　　　C. $\dfrac{1}{9}$　　　　D. $\dfrac{7}{9}$

【答案】A

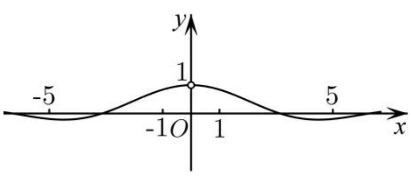
【解析】

【详解】试题分析：$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta+\cos\theta)=\dfrac{1}{3}$，两边平方后得$\dfrac{1}{2}(\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta)=\dfrac{1}{9}$，

整理为$2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{7}{9}$，即$\sin 2\theta=-\dfrac{7}{9}$，故选 A.

考点：三角函数

6. 已知函数$y=f(x)$的部分图像，如下图所示，则该函数的解析式可能为（　　）



A. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$　　　　B. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x}$

C. $f\left(x\right)=\left|\sin x\right|\cos x$

D. $f\left(x\right)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\sin x$

【答案】A

【解析】

【分析】利用函数的奇偶性和函数值判断.

【详解】解：由图像知：函数是偶函数，

A. 因为 $f\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{x},f\left(-x\right)=\dfrac{\sin\left(-x\right)}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$，所以 $f\left(x\right)=f\left(-x\right)$，又 $f\left(1\right)=\sin 1>0$，符合题意；

B. 因为 $f\left(x\right)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x},f\left(-x\right)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{-x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$，所以 $f\left(x\right)=f\left(-x\right)$，又当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)>0$，不符合题意；

C. 因为 $f\left(x\right)=\left|\sin x\right|\cos x,f\left(-x\right)=\left|\sin\left(-x\right)\right|\cos\left(-x\right)=\left|\sin x\right|\cos x$，所以 $f\left(x\right)=f\left(-x\right)$，又当 $x=0$ 时，$f\left(x\right)=0$，不符合题意；

D. 因为 $f\left(x\right)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\sin x f\left(x\right)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\sin x$，所以 $f\left(x\right)=-f\left(-x\right)$，是奇函数，不符合题意；

故选：A

7. 已知 O 是坐标原点，点 $A\left(-1,1\right)$，若点 $M\left(x,y\right)$ 为平面区域 $\begin{cases}x+y\geq 2\\ x\leq 1\\ y\leq 2\end{cases}$，上的一个动点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的取值范围是（　　）

A. [－1，0]　　B. [0，1]　　C. [0，2]　　D. [－1，2]

【答案】C

【解析】

【分析】由约束条件作出可行域，利用向量数量积运算可得目标函数 $z=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=-x+y$，化目标函数为直线方程的斜截式，由数形结合得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的取值范围.

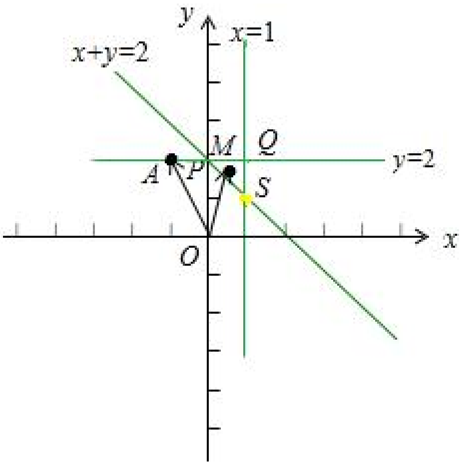
【详解】满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geq 2\\ x\leq 1\\ y\leq 2\end{cases}$ 的平面区域如图所示：联立 $\begin{cases}x=1\\ x+y=2\end{cases}$，解得 S（1，1），P（0，2）.

$\because A\left(-1,1\right)$，$M\left(x,y\right)$，$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=-x+y$，令 $z=-x+y$，化为 $y=x+z$，

作出直线 $y=x$，由图可知，平移直线 $y=x$ 至 S 时，目标函数 $z=-x+y$ 有最小值 0；

平移直线 $y=x$ 至 P 时，目标函数 $z=-x+y$ 有最大值 2. $\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的取值范围是[0，2].

故选 C



【点睛】本题考查简单的线性规划的简单应用，平面向量数量积公式的应用，考查数形结合的解题思想方法，属于基础题.

8. 已知等比数列$\{a_n\}$满足$a_n>0,n=1,2,\cdots$，且$a_5\cdot a_{2n-5}=2^{2n}(n\ge 3)$，则当$n\ge 1$时，

$\log_2 a_1+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_{2n-1}=$

A. $n(2n-1)$　　B. $(n+1)^2$　　C. n^2　　D. $(n-1)^2$

【答案】C

【解析】

【详解】试题分析：因为$\{a_n\}$为等比数列，所以$a_1\cdot a_{2n-1}=a_2\cdot a_{2n-2}=\cdots=a_5\cdot a_{2n-5}=2^{2n}$，

$\therefore \log_2 a_1+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_{2n-1}=\log_2\left(a_1a_{2n-1}\right)^{\frac{n}{2}}=\log\left(2^{2n}\right)^{\frac{n}{2}}=\log_2 2^{n^2}=n^2$.故C正确.

考点：1 等比比数列的性质;2 对数的运算法则.

9. 某学生到工厂实践，欲将一个底面半径为2，高为3的实心圆锥体工件切割成一个圆柱体，并使圆柱体的一个底面落在圆锥体的底面内.若不考虑损耗，则得到的圆柱体的最大体积是

A. $\frac{16\pi}{9}$　　B. $\frac{8\pi}{9}$　　C. $\frac{16\pi}{27}$　　D. $\frac{8\pi}{27}$

【答案】A

【解析】

【分析】

根据条件求出圆柱的体积，利用基本不等式研究函数的最值即可.

【详解】解：设圆柱的半径为r，高为x，体积为V，

则由题意可得$\frac{r}{2}=\frac{3-x}{3}$，

$\therefore x=3-\frac{3}{2}r$，

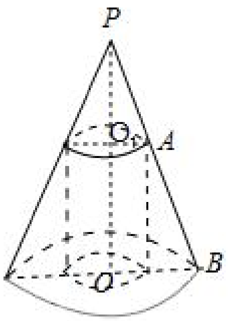
$\therefore$圆柱的体积为$V(r)=\pi r^2(3-\frac{3}{2}r)(0<r<2)$，

则 $V(r)=\frac{16}{9}\pi\cdot\frac{3}{4}r\cdot\frac{3}{4}r\cdot(3-\frac{3}{2}r)\cdot\frac{16\pi}{9}\cdot(\frac{\frac{3}{4}r+\frac{3}{4}r+3-\frac{3}{2}r}{3})^3=\frac{16\pi}{9}$.

当且仅当 $\frac{3}{4}r=3-\frac{3}{2}r$，即 $r=\frac{4}{3}$ 时等号成立.

$\therefore$ 圆柱的最大体积为 $\frac{16\pi}{9}$，

故选：A.



【点睛】本题考查圆柱的体积和基本不等式的实际应用，利用条件建立体积函数是解决本题的关键，是中档题.

10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，若 $f(2-x)=f(x)$，且 $f(x+2)+2$ 为奇函数，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2023)=$（　　）

A. -5085　　B. -4046　　C. 985　　D. 2046

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意可得 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，$f(x)$ 关于 $(2,-2)$ 对称，且 $f(2)=-2$，令 $g(x)=f(x)+2$，求出函数 $g(x)$ 的周期，即可得出函数 $f(x)$ 的周期，再根据函数的周期性求解即可.

【详解】令 $g(x)=f(x)+2$，

因为 $f(2-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，所以 $g(x)$ 关于 $x=1$ 对称，

所以 $g(2-x)=g(x)$，

因为 $f(x+2)+2$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 关于 $(2,-2)$ 对称，且 $f(2)+2=0$，

所以 $f(2)=-2$，

所以函数 $g(x)$ 关于 $(2,0)$ 对称，即函数 $g(x+2)$ 为奇函数，

所以 $g(-x+2)=-g(x+2)$，

所以 $g(x+2)=-g(x)$，所以 $g(x+4)=-g(x+2)=g(x)$，

即 $f(x+4)+2=f(x)+2$，所以 $f(x+4)=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 是以4为周期的周期函数，

因为 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，所以 $f(0)=f(2)=-2$，

因为 $f(x)$ 关于 $(2,-2)$ 对称，

所以 $f(1)+f(3)=2f(2)=-4$，

所以 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=-8$，

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2023)=-8\times\dfrac{2024}{4}-f(0)=-4046$.

故选：B.

11. 2022 年卡塔尔世界杯会徽（如图）正视图近似伯努利双纽线.在平面直角坐标系 xOy 中，把到定点 $F_1(-a,0)$，$F_2(a,0)$ 距离之积等于 $a^2\,(a>0)$ 的点的轨迹称为双纽线.已知点 $P(x_0,y_0)$ 是双纽线 C 上一点，有如下说法：

①双纽线 C 关于原点 O 中心对称；

② $-\dfrac{a}{2}\le y_0\le\dfrac{a}{2}$；

③双纽线 C 上满足 $|PF_1|=|PF_2|$ 的点 P 有两个；

④ $|PO|$ 的最大值为 $\sqrt{2}a$.

其中所有正确的说法为（　　）

A. ①②　　　B. ①③　　　C. ①②③　　　D. ①②④

【答案】D

【解析】

【分析】对于①，根据双纽线的定义求出曲线方程，然后将 $(-x,-y)$ 替换方程中的 (x,y) 进行判断，对于②，根据三角形的等面积法分析判断，对于③，由题意得 $|PF_1|=|PF_2|$，从而可得点 P 在 y 轴上，进行可判断，对于④，由向量的性质结合余弦定理分析判断, 据此可求出选项.

【详解】对于①，因为定义在平面直角坐标系 xOy 中，把到定点 $F_1(-a,0),F_2(a,0)$ 距离之积等于 $a^2(a>0)$ 的点的轨迹称为双纽线 C，所以 $\sqrt{(x+a)^2+y^2}\sqrt{(x-a)^2+y^2}=a^2$，

用 $(-x,-y)$ 替换方程中的 (x,y)，原方程不变，所以双纽线 C 关于原点 O 中心对称，所以①正确；

对于②，根据三角形的等面积法可知 $\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{1}{2}\times 2a\times|y_0|$，

即 $|y_0|=\dfrac{a}{2}\sin\angle F_1PF_2\le\dfrac{a}{2}$，所以 $-\dfrac{a}{2}\le y_0\le\dfrac{a}{2}$，所以②正确；

对于③，若双纽线 C 上的点 P 满足 $|PF_1|=|PF_2|$，则点 P 在 y 轴上，即 $x=0$，

所以$\sqrt{a^2+y^2}\sqrt{a^2+y^2}=a^2$，得$y=0$，所以这样的点$P$只有一个，所以③错误；

对于④，因为$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2})$，

所以$\left|\overrightarrow{PO}\right|^2=\frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{PF_1}\right|^2+2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}+\left|\overrightarrow{PF_2}\right|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{PF_1}\right|^2+2\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PF_2}\right|\cos\angle F_1PF_2+\left|\overrightarrow{PF_2}\right|^2\right)$，

由余弦定理得$4a^2=\left|\overrightarrow{PF_1}\right|^2-2\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PF_2}\right|\cos\angle F_1PF_2+\left|\overrightarrow{PF_2}\right|^2$，

所以$\left|\overrightarrow{PO}\right|^2=a^2+\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PF_2}\right|\cos\angle F_1PF_2=a^2+a^2\cos\angle F_1PF_2\le 2a^2$，

所以$|PO|$的最大值为$\sqrt{2}a$，所以④正确，

故选：D

12. 已知实数$a>0$，$b>0$，$a\ne 1$，且满足$\sqrt{a}\cdot\ln b=a-1$，则下列判断正确的是（　　）

A. $a>b$　　B. $a<b$　　C. $\log_a b>1$　　D. $\log_a b<1$

【答案】C

【解析】

【分析】由$\sqrt{a}\cdot\ln b=a-1$，可得$\ln b-\ln a=\frac{a-1}{\sqrt{a}}-\ln a$，令$f\left(x\right)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\ln x\left(x>0\right)$，再利用导数判断函数$f\left(x\right)$的单调性，再分$a>1$和$0<a<1$两种情况讨论，即可得解.

【详解】因为$\sqrt{a}\cdot\ln b=a-1$，所以$\ln b=\frac{a-1}{\sqrt{a}}$，所以$\ln b-\ln a=\frac{a-1}{\sqrt{a}}-\ln a$，

令$f\left(x\right)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\ln x\left(x>0\right)$，则$f'\left(x\right)=\frac{\sqrt{x}-\frac{x-1}{2\sqrt{x}}}{x}-\frac{1}{x}=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}}$，

所以$f'\left(x\right)=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x\sqrt{x}}\ge 0\left(x>0\right)$，

所以$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上递增，且$f\left(1\right)=0$，

当$x\in\left(0,1\right)$时，$f\left(x\right)<0$，当$x\in\left(1,+\infty\right)$时，$f\left(x\right)>0$，

因为$a>0$，$b>0$，$a\ne 1$，

所以当$0<a<1$时，$f\left(a\right)=\frac{a-1}{\sqrt{a}}-\ln a<0$，

即$\ln b-\ln a<0$，所以$b<a$，

所以$\ln b<\ln a<0$，所以$\frac{\ln b}{\ln a}>1$，即$\log_a b>1$，

当$a>1$时，$f\left(a\right)=\frac{a-1}{\sqrt{a}}-\ln a>0$，

即$\ln b-\ln a>0$，所以$b>a$，

所以 $\ln b>\ln a>0$，所以 $\dfrac{\ln b}{\ln a}>1$，即 $\log_a b>1$，

综上所述 C 选项正确.

故选：C.

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键在于根据题意得出 $\ln b-\ln a=\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}-\ln a$，在构造函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}-\ln x\left(x>0\right)$，再根据函数的单调性及 $f\left(1\right)=0$ 进行分析.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 抛物线 C： $y^2=4x$ 的准线截圆 $x^2+y^2=4$ 所得的弦长为________.

【答案】$2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】先求出圆心到准线的距离，再根据圆的弦长公式求解即可.

【详解】抛物线 C： $y^2=4x$ 的准线为 $x=-1$，

圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心为 $\left(0,0\right)$，半径 $r=2$，

圆心 $\left(0,0\right)$ 到准线 $x=-1$ 的距离 $d=1$，

所以所求弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3}$.

故答案为：$2\sqrt{3}$.

14. 某学校组织 1200 名学生进行“防疫知识测试”．测试后统计分析如下：学生的平均成绩为 $\overline{x}$ =80，方差为 $s^2=25$．学校要对成绩不低于 90 分的学生进行表彰．假设学生的测试成绩 X 近似服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$（其中 μ近似为平均数 $\overline{x}$， σ^2 近似为方差 s^2，则估计获表彰的学生人数为__________．（四舍五入，保留整数）

参考数据：随机变量 X 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P\left(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma\right)=0.6827$，$P\left(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma\right)=0.9545$，$P\left(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma\right)=0.9973$.

【答案】27

【解析】

【分析】根据题意得到 $\mu=80,\sigma=5,\mu+2\sigma=90$，结合 3σ 原则和正态分布的对称性求出 $P(X>90)=0.02275$，求出获得表彰的学生人数.

【详解】由题意得： $\mu=80,\sigma=5,\mu+2\sigma=90$，

故 $P(X>90)=P(X>\mu+2\sigma)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\times0.9545=0.02275$，

所以 $1200\times0.02275\approx27$.

故答案为：27.

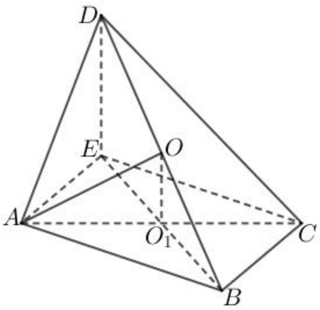
15. 已知 A,B,C,D 是球 O 的球面上的四点， BD 为球 O 的直径，球 O 的表面积为 16π，且 $AB\perp BC$，$AB=BC=2$，则直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值是__________.

【答案】$\frac{\sqrt{6}}{3}$##$\frac{1}{3}\sqrt{6}$

【解析】

【分析】取 AC 中点 O_1，延长 BO_1 至 E，使 $O_1E=BO_1$，根据给定条件证明 $DE\perp$ 平面 ABC，经推理计算作答.

【详解】依题意，O 是 BD 中点，取 AC 中点 O_1，延长 BO_1 至 E，使 $O_1E=BO_1$，连接 OO_1,DE,AE,CE，如图，



则有 $DE//OO_1$，且四边形 $ABCE$ 是平行四边形，$AE=BC=2$，

因 $AB\perp BC$，则 O_1 是平面 ABC 截球 O 所得截面小圆的圆心，于是得 $OO_1\perp$ 平面 ABC，$DE\perp$ 平面 ABC，

因此，$\angle DAE$ 是直线 AD 与平面 ABC 所成角，

由球 O 的表面积为 16π 得球半径 $OA=2$，而 $AB=BC=2$，则 $AO_1=\sqrt{2}$，而 $OO_1\perp AC$，

从而得 $OO_1=\sqrt{2}$，$DE=2OO_1=2\sqrt{2}$，$Rt\triangle ADE$ 中，$AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=2\sqrt{3}$，$\sin\angle DAE=\frac{DE}{AD}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{6}}{3}$

16. 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_2 作圆 $O:x^2+y^2=a^2$ 的切线，切点为 T，延长 F_2T 交双曲线 E 的左支于点 P. 若 $|PF_2|>\frac{3}{2}|TF_2|$，则双曲线 E 离心率的取值范围是________.

【答案】$(\sqrt{2},\sqrt{10})$

【解析】

【分析】由题知 $|OT|=a$，$|OF_2|=c$，$|TF_2|=b$，$\cos\angle OF_2T=\frac{b}{c}$，进而结合双曲线的性质，余弦定理得 $|PF_2|=\frac{b^2}{b-a}$，故 $\frac{b^2}{b-a}>\frac{3}{2}b$ 且 $b>a$，进而得 $3>\frac{b}{a}>1$，再根据离心率公式求解即可.

【详解】解：如图，因为过 F_2 作圆 $O:x^2+y^2=a^2$ 的切线，切点为 T，

所以 $OT\perp TF_2$，$|OT|=a$，

所以，在 $Rt\triangle OTF_2$ 中，$|OT|=a$，$|OF_2|=c$，$|TF_2|=b$，$\cos\angle OF_2T=\frac{b}{c}$，

因为，延长 F_2T 交双曲线 E 的左支于点 P，

所以$|PF_2|-|PF_1|=2a$，即$|PF_2|-2a=|PF_1|$，

所以，在$\triangle PF_1F_2$中，$\cos\angle OF_2T=\dfrac{b}{c}=\dfrac{|PF_2|^2+|F_1F_1|^2-|PF_1|^2}{2|PF_2|\cdot|F_1F_1|}=\dfrac{|PF_2|^2+4c^2-(|PF_2|-2a)^2}{4c|PF_2|}$，整理得

$|PF_2|=\dfrac{b^2}{b-a}$，

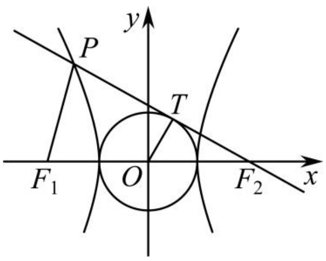
所以$b>a$，即$\dfrac{b}{a}>1$，所以$e=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}>\sqrt{2}$

因为$|PF_2|>\dfrac{3}{2}|TF_2|$，即$\dfrac{b^2}{b-a}>\dfrac{3}{2}b$，整理得$b<3a$，即$\dfrac{b}{a}<3$

所以$e=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}<\sqrt{10}$，

综上，双曲线E离心率的取值范围是$(\sqrt{2},\sqrt{10})$

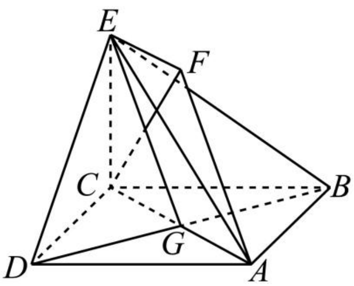
故答案为：$(\sqrt{2},\sqrt{10})$



三、解答题：共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17. 如图，正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直，$CE\perp AC$，$EF// AC$，$AB=\sqrt{2}$，$CE=EF=1$.



（1）求证：$CF\perp$平面 BDE;

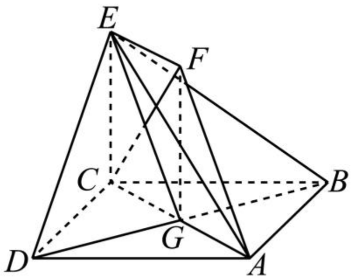
（2）求二面角 $A-BE-D$ 的大小.

【答案】(1) 见证明；(2) $\dfrac{\pi}{6}$（或30^0）

【解析】

【分析】(1) 连接 FG，可证得四边形 CEFG 为菱形，故得$CF\perp EG$. 再根据平面 ABCD⊥平面 ACEF 得到$BD\perp$平面 ACEF，从而$CF\perp BD$. 由线面垂直的判定定理可得结论成立.（2）建立空间直角坐标系，求出平面 BDE 和平面 ABE 的法向量，求出两向量的夹角的余弦值并结合图形可得所求角的大小.

【详解】(1) 连接 FG，



$\because EF//CG, EF=CG=1, CE=1$，

∴四边形 CEFG 为菱形，

$\therefore CF\perp EG$.

∵ABCD 为正方形，

$\therefore BD\perp AC$，

又平面 ABCD⊥平面 ACEF，平面 ABCD∩平面 ACEF=AC，BD⊂平面 ABCD

$\therefore BD\perp$平面 ACEF，

∵CF⊂平面 ACEF，

$\therefore CF\perp BD$.

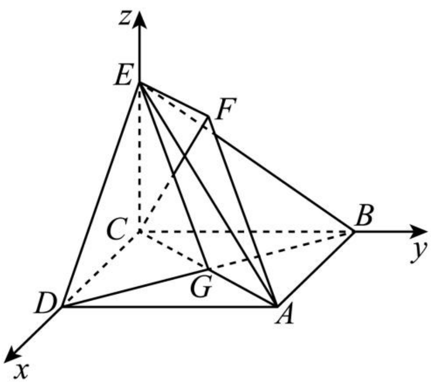
又 $BD\cap EG=G$，BD⊂平面 BDE, BG⊂平面 BDE，

$\therefore CF\perp$平面 BDE.

（1）∵正方形 ABCD 和四边形 ACEF 所在的平面互相垂直，且 CE⊥AC，

∴CE⊥平面 ABCD，

以 C 为原点，CB 为 x 轴，CD 为 y 轴，CE 为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$，



则 $C(0,0,0), A(\sqrt{2},\sqrt{2},0), B(0,\sqrt{2},0), E(0,0,1), D(\sqrt{2},0,0), F\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，

$\therefore \overrightarrow{BE}=(0,-\sqrt{2},1), \overrightarrow{CF}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},0,0)$，

由（1）可得 $\overrightarrow{CF}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ 是平面 BDE 的一个法向量.

设平面 ABE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot\vec{n}=-\sqrt{2}x_1=0\\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=-\sqrt{2}y_1+z_1=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x_1=0\\ z_1=-\sqrt{2}y_1\end{cases}$，

令 $y_1=1$，得 $\vec{n}=\left(0,1,\sqrt{2}\right)$，

$$\therefore \cos<\overrightarrow{CF},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{CF}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{CF}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

由图形可得二面角 $A-BE-D$ 为锐角，

∴二面角 A-BE-D 的大小为 $\frac{\pi}{6}$（或 30^0）.

【点睛】利用向量求空间角是高考的热点，几乎每年必考，主要是突出向量的工具性作用．解题时要注意以下两点：一是建立坐标系时要明确指出坐标原点和坐标轴，否则会出现建系不规范的错误．二是将向量的夹角转化成空间角时，要注意根据角的概念和图形特征进行转化．

18. 盲盒，是指消费者不能提前得知具体产品款式的玩具盒子，具有随机性．因其独有的新鲜性，刺激性及社交属性而深受各个年龄段人们的喜爱．已知 M 系列盲盒共有 12 个款式，为调查 M 系列盲盒更受哪个年龄段的喜爱，向 00 前、00 后人群各随机发放了 50 份问卷，并全部收回．经统计，有 45%的人未购买该系列育盒，在这些未购买者当中，00 后占 $\frac{2}{3}$．

（1）请根据以上信息填表，并分析是否有 99%的把握认为购买该系列盲盒与年龄有关？

	00 前	00 后	总计
购买			
未购买			
总计			100

附：$K^2=\frac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$，

$P\left(K^2\geq k_0\right)$	0.10	0.05	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

（2）一批盲盒中，每个盲盒随机装有一个款式，甲同学已经买到 3 个不同款，乙、丙同学分别已经买到 m 个不同款，已知三个同学各自新购买一个盲盒，且相互之间无影响，他们同时买到各自的不同款的概率为 $\frac{1}{3}$．

①求 m；

②设 X 表示三个同学中各买到自己不同款的总人数，求 X 的分布列和数学期望．

【答案】（1）有 99%的把握认为购买该系列盲盒与年龄有关

（2）① 4；②见解析

【解析】

【分析】（1）列出列联表，计算出 K^2 然后判断.

（2）①利用概率的乘法公式计算；

②分析 X 的取值后，由概率的加法公式和乘法公式计算，得到分布列，然后计算期望.

【小问 1 详解】

由题意可得

	00 前	00 后	总计
购买	35	20	55
未购买	15	30	45
总计	50	50	100

则 $K^2=\dfrac{100(35\times30-15\times20)^2}{50\times50\times45\times55}=\dfrac{100}{11}\approx 9.091>6.635$

所以有 99%的把握认为购买该系列盲盒与年龄有关.

【小问 2 详解】

①由题意三个同学同时买到各自的不同款的概率为 $\dfrac{9}{12}\times\dfrac{12-m}{12}\times\dfrac{12-m}{12}=\dfrac{1}{3}$，解得 $m=20$ 或 4，

因为 $0<m\le12$，所以 $m=4$.

②由题 X 的所有可能取值为 0，1，2，3

$P(X=0)=\dfrac{3}{12}\times\dfrac{4}{12}\times\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{36}$；

$P(X=1)=\dfrac{9}{12}\times\dfrac{4}{12}\times\dfrac{4}{12}+\dfrac{3}{12}\times\dfrac{8}{12}\times\dfrac{4}{12}\times2=\dfrac{7}{36}$；

$P(X=2)=\dfrac{9}{12}\times\dfrac{8}{12}\times\dfrac{4}{12}\times2+\dfrac{3}{12}\times\dfrac{8}{12}\times\dfrac{8}{12}=\dfrac{4}{9}$；

$P(X=3)=\dfrac{1}{3}$

其分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{36}$	$\dfrac{7}{36}$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{1}{3}$

所以数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{1}{36}+1\times\dfrac{7}{36}+2\times\dfrac{4}{9}+3\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{25}{12}$.

19. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$c^2+ac=b^2$.

（1）证明：$B=2C$；

（2）求 $\dfrac{a+b}{c}$ 的取值范围.

【答案】（1）证明见解析.

（2）$(1,5)$.

【解析】

【分析】（1）运用余弦定理得 $2c\cdot\cos B=a-c$，再运用正弦定理边化角化简计算即可.

（2）运用三角形内角范围求得角 C 的范围，进而求得 $\cos C$ 范围，运用边化角将问题转化为求关于 $\cos C$ 的二次函数在区间上的值域.

【小问 1 详解】

$\because c^2+ac=b^2$，

$\therefore c^2-b^2=-ac$，

$\therefore$ 由余弦定理得：$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2-ac}{2ac}=\dfrac{a-c}{2c}$，即：$2c\cdot\cos B=a-c$，

由正弦定理得：$2\sin C\cdot\cos B=\sin A-\sin C$，

$\therefore 2\sin C\cdot\cos B=\sin(B+C)-\sin C=\sin B\cos C+\sin C\cos B-\sin C$，

整理得：$\sin B\cos C-\sin C\cos B-\sin C=0$，即：$\sin(B-C)=\sin C$，

又 $\because B$、$C\in(0,\pi)$，

$\therefore B-C=C$，即：$B=2C$.

【小问 2 详解】

$\because B=2C$，

$\therefore A=\pi-3C$，

又 $\because \sin 2C=2\sin C\cdot\cos C$，

$\sin 3C=\sin(C+2C)=\sin C\cdot\cos 2C+\cos C\cdot\sin 2C=\sin C\cdot\cos 2C+2\sin C\cdot\cos^2 C$，$\sin C\neq 0$，

$\therefore$ 由正弦定理得：

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{\sin(\pi-3C)+\sin 2C}{\sin C}=\frac{\sin 3C+\sin 2C}{\sin C}$$

$$=\frac{\sin C\cdot\cos 2C+2\sin C\cdot\cos^2 C+2\sin C\cdot\cos C}{\sin C}=\cos 2C+2\cos^2 C+2\cos C$$

$$=2\cos^2 C-1+2\cos^2 C+2\cos C=4\cos^2 C+2\cos C-1,$$

又 $\because \begin{cases}0<A<\pi\\0<B<\pi\\0<C<\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<\pi-3C<\pi\\0<2C<\pi\\0<C<\pi\end{cases}\Rightarrow 0<C<\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}<\cos C<1$，

令 $t=\cos C$，则 $\dfrac{a+b}{c}=4t^2+2t-1$，$\dfrac{1}{2}<t<1$，

$\because y=4t^2+2t-1$ 对称轴为 $t=-\dfrac{1}{4}$，

$\therefore y=4t^2+2t-1$ 在 $(\dfrac{1}{2},1)$ 上单调递增，

当$t=\frac{1}{2}$时，$y=4\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}-1=1$；当$t=1$时，$y=4+2-1=5$，

$\therefore 1<\frac{a+b}{c}<5$，即：$\frac{a+b}{c}$的范围为$(1,5)$.

20. 已知圆F_1：$\left(x+\sqrt{2}\right)^2+y^2=16$，$E$为圆$F_1$上一动点，$F_2\left(\sqrt{2},0\right)$，线段$EF_2$的垂直平分线交$EF_1$于点$G$.

（1）求动点G的轨迹C的方程；

（2）已知$A\left(2,0\right)$，轨迹C上关于原点对称的两点M，N，射线AM，AN分别与圆$x^2+y^2=4$交于P，Q两点，记直线MN和直线PQ的斜率分别为k_1，k_2.

①求AM与AN的斜率的乘积；

②问$\frac{k_1}{k_2}$是否为定值，若是，求出该定值；若不是，说明理由.

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2）①$-\frac{1}{2}$.②$\frac{k_1}{k_2}$为定值$\frac{2}{3}$.

【解析】

【分析】（1）根据已知条件知点G的轨迹符合椭圆定义，运用椭圆定义求解即可.

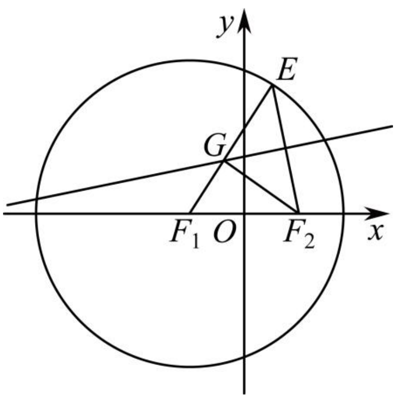
（2）①设出M、N坐标，运用点M、N在椭圆上进行等量代换及斜率公式计算$k_{AM}\cdot k_{AN}$即可；

②设出直线AM与直线AN的方程，联立直线AM方程与椭圆方程可得x_0、y_0，进而求得k_1，联立直线AM方程与圆方程可得x_1、y_1，同理可得x_2、y_2，进而求得k_2，代入$\frac{k_1}{k_2}$计算可得结果.

【小问1详解】

由题意知，$F_1(-\sqrt{2},0)$，$r=4$，因为$(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2+0<16$，所以点$F_2$在圆$F_1$内，

如图所示，



由题意知，$|GE|=|GF_2|$，所以$|GF_1|+|GF_2|=|GF_1|+|GE|=|EF_1|=r=4>|F_1F_2|=2\sqrt{2}$，

所以动点G的轨迹为：以F_1、F_2为焦点且长轴长为4的椭圆.

即：$2a=4$，$c=\sqrt{2}$，所以$a=2$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$，

所以动点 G 的轨迹 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

【小问 2 详解】

①由题意知，直线 AM 与直线 AN 的斜率存在且不为 0，

设 $M(x_0,y_0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $N(-x_0,-y_0)$，

$\because M$、N 在椭圆上，$\therefore \dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{2}=1$，即 $x_0^2=4-2y_0^2$，

$\therefore k_{AM}\cdot k_{AN}=\dfrac{y_0}{x_0-2}\times\dfrac{y_0}{x_0+2}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-4}=\dfrac{y_0^2}{4-2y_0^2-4}=-\dfrac{1}{2}$,

即：直线 AM 与直线 AN 的斜率的乘积为 $-\dfrac{1}{2}$.

②设直线 AM 方程为 $x=my+2$，

由①知，$k_{AM}\cdot k_{AN}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $k_{AN}=-\dfrac{m}{2}$，则直线 AN 方程为 $x=-\dfrac{2}{m}y+2$，

联立 $\begin{cases}x=my+2\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}\Rightarrow (m^2+2)y^2+4my=0$，

因为 A、M 在轨迹 C 上，所以 $0+y_0=\dfrac{-4m}{m^2+2}$，即：$y_0=\dfrac{-4m}{m^2+2}$，所以 $x_0=my_0+2=\dfrac{4-2m^2}{m^2+2}$，

所以 $k_1=\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{2m}{m^2-2}$，

联立 $\begin{cases}x=my+2\\ x^2+y^2=4\end{cases}\Rightarrow (m^2+1)y^2+4my=0$，

因为 A、P 在圆上，所以 $0+y_1=\dfrac{-4m}{m^2+1}$，即：$y_1=\dfrac{-4m}{m^2+1}$，所以 $x_1=my_1+2=\dfrac{2-2m^2}{m^2+1}$，

同理：$y_2=\dfrac{8m}{m^2+4}$，$x_2=\dfrac{2m^2-8}{m^2+4}$，

所以 $k_2=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{m(3m^2+6)}{m^4-4}=\dfrac{3m}{m^2-2}$，

所以 $\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{2m}{m^2-2}\times\dfrac{m^2-2}{3m}=\dfrac{2}{3}$，即 $\dfrac{k_1}{k_2}$ 为定值 $\dfrac{2}{3}$.

【点睛】方法点睛：圆锥曲线中的定值问题的常见类型及解题策略

(1)求代数式为定值．依题设条件，得出与代数式参数有关的等式，代入代数式、化简即可得出定值．

(2)求点到直线的距离为定值．利用点到直线的距离公式得出距离的解析式，再利用题设条件化简、变形求得．

(3)求某线段长度为定值．利用长度公式求得解析式，再依据条件对解析式进行化简、变形即可求得．

21. 已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-ax^2-\cos x-\ln\left(x+1\right)$.

（1）若 $a=1$，求证；函数 $f\left(x\right)$ 的图象与 x 轴相切于原点；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-1,0\right)$，$\left(0,+\infty\right)$ 各恰有一个极值点，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

【解析】

【分析】（1）当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x^{2}-\cos x-\ln\left(x+1\right)$，得到 $f\left(0\right)=0$，求导，再根据导数的几何意义即可得证；

（2）先证明出 $\mathrm{e}^{x}\geq x-1$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，三次求导后，结合第三次求导后的函数单调性及 $h\left(0\right)=3-2a$，分 $a\leq\dfrac{3}{2}$ 和 $a>\dfrac{3}{2}$ 两种情况，结合零点存在性定理进行求解，得到实数 a 的取值范围.

【小问 1 详解】

因为 $a=1$，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x^{2}-\cos x-\ln\left(x+1\right)$，$f\left(0\right)=0$，

又 $f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-2x+\sin x-\dfrac{1}{x+1}$，

所以 $f'\left(0\right)=0$，所以在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=0$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的图象与 x 轴相切于坐标原点；

【小问 2 详解】

先证明不等式 $\mathrm{e}^{x}\geq x+1$ 恒成立，

令 $\varphi\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x-1$，则 $\varphi'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-1$，

当 $x>0$ 时，$\varphi'\left(x\right)>0$，当 $x<0$ 时，$\varphi'\left(x\right)<0$，

所以 $\varphi\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 上递减，在 $\left(0,+\infty\right)$ 上递增，

故 $\varphi\left(x\right)\geq\varphi\left(0\right)=0$，所以 $\mathrm{e}^{x}\geq x-1$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

$f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-2ax+\sin x-\dfrac{1}{x+1}$，令 $g\left(x\right)=f'\left(x\right)$，

$g'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-2a+\cos x+\dfrac{1}{\left(x+1\right)^{2}}$，

令 $h\left(x\right)=g'\left(x\right)$，$h'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\sin x-\dfrac{2}{\left(x+1\right)^{3}}$，

当 $x\in\left(-1,0\right)$ 时，$h'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\sin x-\dfrac{2}{\left(x+1\right)^{3}}<1-\sin x-2=-\sin x-1<0$，

故 $h\left(x\right)$ 在 $\left(-1,0\right)$ 上为减函数，

因为 $h\left(0\right)=3-2a$，所以当 $3-2a\geq0$，

即 $a\leq\dfrac{3}{2}$ 时，$h\left(x\right)\geq0$，

所以 $g(x)$ 为增函数，故 $g(x)<g(0)=0$，

所以 $f(x)$ 为减函数，故函数 $f(x)$ 在 $x\in(-1,0)$ 无极值点；

当 $a>\dfrac{3}{2}$ 时，当 $x\in(-1,0)$，因为 $g'(x)$ 为减函数，$g'(0)=3-2a<0$，

$$g'\left(-1+\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)=\mathrm{e}^{-1+\sqrt{\frac{1}{2a}}}-2a+\cos\left(-1+\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)+2a=\mathrm{e}^{-1+\sqrt{\frac{1}{2a}}}+\cos\left(-1+\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)>0,$$

故必存在 $x_0\in(-1,0)$，使得 $g'(x_0)=0$，

当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数，

当 $x\in(x_0,0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数，

而 $f'(0)=0$，故 $f'(x_0)>0$，

又因为 $f'\left(-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2a}}\right)=\mathrm{e}^{-1+\frac{1}{\mathrm{e}^{2a}}}+2a-\dfrac{2a}{\mathrm{e}^{2a}}+\sin\left(-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2a}}\right)-\mathrm{e}^{2a}$

$$=\left(2a-\mathrm{e}^{2a}\right)+\mathrm{e}^{-1+\frac{1}{\mathrm{e}^{2a}}}-\frac{2a}{\mathrm{e}^{2a}}+\sin\left(-1+\frac{1}{\mathrm{e}^{2a}}\right)<-1+\mathrm{e}^{-1+\frac{1}{\mathrm{e}^{2a}}}-\frac{2a}{\mathrm{e}^{2a}}+\sin\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{1}{2a}}\right)<0,$$

所以必存在 $m\in(-1,x_0)$，$f'(m)=0$，

且当 $x\in(-1,m)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数，

当 $x\in(m,0)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，

故 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上有一个极小值点 m，

令 $t(x)=h'(x)=\mathrm{e}^x-\sin x-\dfrac{2}{(x+1)^3}$，

因为 $t'(x)=\mathrm{e}^x-\cos x+\dfrac{6}{(x+1)^4}>0$，所以 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又因为 $h'(0)<0$，$h'(1)>0$，所以总存在 $x_1\in(0,1)$ 使 $h'(x_1)=0$，

且当 $x\in(0,x_1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

$x\in(x_1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(0,+\infty)$，$h(0)=3-2a<0$，

且 $h(2a)=\mathrm{e}^{2a}-2a+\cos(2a)+\dfrac{1}{(2a+1)^2}>1+\cos(2a)+\dfrac{1}{(2a+1)^2}>0$，

故必存在 $x_2\in(0,+\infty)$，使得 $g'(x_2)=0$，

$x\in(0,x_2)$，$g'(x)<0$，$f'(x)$ 为减函数，

$x\in(x_2,+\infty)$，$g'(x)>0$，$f'(x)$ 为增函数，

因为 $f'(0)=0$，所以当 $x\in(0,x_2)$，$f'(x)<0$，即 $f'(x_2)<0$，

又因为 $f'(4a)=\mathrm{e}^{4a}-8a^2+\sin(4a)-\dfrac{1}{4a+1}>(a+1)^4-8a^2+\sin(4a)-\dfrac{1}{4a+1}$

$=a^4-2a^2+4a^3+4a+1+\sin(4a)-\dfrac{1}{4a+1}>0$，

故存在 $n\in(x_2,+\infty)$，使得 $f'(n)=0$，

且当 $x\in(x_2,n)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数，

当 $x\in(n,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，

故 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 有一个极小值点 n，

所以若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,+\infty)$ 各恰有一个极值点，

综上：实数 a 的取值范围是 $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

【点睛】方法点睛：隐零点的处理思路：

第一步：用零点存在性定理判定导函数零点的存在性，其中难点是通过合理赋值，敏锐捕捉零点存在的区间，有时还需结合函数单调性明确零点的个数；

第二步：虚设零点并确定取范围，抓住零点方程实施代换，如指数与对数互换，超越函数与简单函数的替换，利用同构思想等解决，需要注意的是，代换可能不止一次.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一道作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

【选修 4-4：坐标系与参数方程】

22. 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\sin\alpha+2\cos\alpha,\\ y=1+\cos\alpha-2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立的极坐标系中，直线 l 的方程是 $\rho\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$.

（1）求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

（2）若点 A 的坐标为 $(2,0)$，直线 l 与曲线 C 交于 P，Q 两点，求 $\dfrac{1}{|AP|}+\dfrac{1}{|AQ|}$ 的值.

【答案】（1）曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$；直线 l 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-2=0$

（2）$\dfrac{\sqrt{17}}{4}$

【解析】

【分析】（1）直接消去参数 α，可得到曲线 C 的普通方程，先 $\rho\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ 化简，然后利用极坐标与直角坐标的关系可得到直线 l 的直角坐标方程；

（2）由（1）可得直线 l 的倾斜角，设出直线 l 的参数方程，代入到曲线 C 的直角坐标方程，可得关于 t 的一元二次方程，设点 A，B 对应的参数分别为 t_1,t_2，根据韦达定理，可得 t_1+t_2,t_1t_2 表达式，结合 t 的几何意义，即可得答案.

【小问 1 详解】

由 $\begin{cases} x=2+\sin\alpha+2\cos\alpha \\ y=1+\cos\alpha-2\sin\alpha \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x-2=\sin\alpha+2\cos\alpha \\ y-1=\cos\alpha-2\sin\alpha \end{cases}$

将上式分别平方，然后相加可得 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$

由 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$ 可得 $\rho\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=1$

即 $\frac{1}{2}\rho\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta=1$，则 $x-\sqrt{3}y-2=0$

【小问 2 详解】

由（1）可知直线 l 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，则其倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$，且点 $A(2,0)$ 在直线 l 上，

所以直线 l 的参数方程为：$\begin{cases} x=2+t\cos\frac{\pi}{6} \\ y=t\sin\frac{\pi}{6} \end{cases}$，即 $\begin{cases} x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=\frac{1}{2}t \end{cases}$ （t 为参数）

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程，整理得 $t^2-t-4=0$

设点 A，B 对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=1$，$t_1t_2=-4$

则 $\frac{1}{|AP|}+\frac{1}{|AQ|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1||t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1||t_2|}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1||t_2|}$

$=\frac{\sqrt{1+16}}{4}=\frac{\sqrt{17}}{4}$

【选修 4-5：不等式选讲】

23. 已知函数 $f(x)=\sqrt{|2x-1|-|x+m|-m}$.

（1）当 $m=2$ 时，求函数 $f(x)$ 的定义域；

（2）设函数 $f(x)$ 的定义域为 M，当 $m>-\frac{1}{2}$ 时，$[-m,\frac{1}{2}]\subseteq M$，求实数 m 的取值范围.

【答案】（1）$(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$；

（2）$-\frac{1}{2}<m\le-\frac{1}{4}$.

【解析】

【分析】(1)将 $m=2$ 代入，列出不等式，再解含绝对值符号的不等式作答.

(2)利用给定条件去掉绝对值符号，转化成恒成立的不等式，分离参数构造函数推理作答.

【小问 1 详解】

当 $m=2$ 时，$f(x)=\sqrt{|2x-1|-|x+2|-2}$，依题意，$|2x-1|-|x+2|-2\ge0$，

当 $x\le-2$ 时，不等式化为：$1-2x+x+2-2\ge0$，解得 $x\le1$，则有 $x\le-2$，

当$-2<x\le\frac{1}{2}$时，不等式化为：$1-2x-x-2-2\ge0$，解得$x\le-1$，则有$-2<x\le-1$；

当$x>\frac{1}{2}$时，不等式化为：$2x-1-x-2-2\ge0$，解得$x\geqslant5$，则有$x\geqslant5$，

综上得：$x\le-1$或$x\geqslant5$，

所以函数$f\left(x\right)$的定义域为$(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$.

【小问 2 详解】

因当$m>-\frac{1}{2}$时，$[-m,\frac{1}{2}]\subseteq M$，则对$\forall x\in[-m,\frac{1}{2}]$，$|2x-1|-|x+m|-m\ge0$成立，

此时，$2x-1\le0$，$x+m\ge0$，则$|2x-1|-|x+m|-m\ge0\Leftrightarrow1-2x-x-m-m\ge0$ $\Leftrightarrow2m\le-3x+1$，

于是得$\forall x\in[-m,\frac{1}{2}]$，$2m\le-3x+1$成立，而函数$y=-3x+1$在$[-m,\frac{1}{2}]$上单调递减，

当$x=\frac{1}{2}$时，$y_{\min}=-\frac{1}{2}$，从而得$2m\le-\frac{1}{2}$，解得$m\le-\frac{1}{4}$，又$m>-\frac{1}{2}$，则$-\frac{1}{2}<m\le-\frac{1}{4}$，

所以实数m的取值范围是$-\frac{1}{2}<m\le-\frac{1}{4}$.