

高一

· 数学 ·

## 参考答案及解析

### 一、选择题

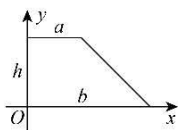
1. B 【解析】  $\vec{OP} + \vec{PS} - \vec{QS} = \vec{OS} - \vec{QS} = \vec{OS} + \vec{SQ} = \vec{OQ}$ .  
故选 B 项.

2. A 【解析】 由  $z \cdot i = 2 + i$ , 得  $z = \frac{2+i}{i} = \frac{(2+i)i}{i \cdot i} = 1 - 2i$ .  
故选 A 项.

3. B 【解析】 依题意底面半径  $r=4$ , 高  $h=3$ , 所以母线  $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ , 所以圆锥的侧面积  $S_{\text{侧}} = \pi r l = 20\pi$ . 故选 B 项.

4. B 【解析】  $\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AD}$ ,  $\vec{AD} = \vec{BD} - \vec{BA}$ ,  $\vec{BD} = \frac{3}{2}\vec{BC}$ ,  
 $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ , 代入可得  $\vec{AE} = \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2}(\vec{AC} - \vec{AB}) + \vec{AB} \right] = -\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$ , 可得  $\lambda = -\frac{1}{4}$ . 故选 B 项.

5. D 【解析】 将该梯形的直观图还原为原来的梯形, 如图所示,

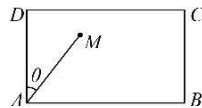


设原来梯形的上底为  $a$ , 下底为  $b$ , 高为  $h$ , 则直观图中等腰梯形的高为  $h' = \frac{1}{2}h \sin 45^\circ$ , 因为直观图的面积为  $\frac{1}{2}(a+b)h' = \frac{1}{2}(a+b) \cdot \frac{1}{2}h \sin 45^\circ = 1$ , 所以  $\frac{1}{2}(a+b)h = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ , 所以原梯形的面积为  $2\sqrt{2}$ . 故选 D 项.

6. A 【解析】 因为向量  $a, b$  的夹角为  $60^\circ$ , 且  $|a|=2, |b|=1$ , 所以  $a \cdot (a+2b) = |a|^2 + 2a \cdot b = 4 + 2 \times 2 \times 1 \times \cos 60^\circ = 6$ ,  $|a+2b| = \sqrt{|a|^2 + 4a \cdot b + 4|b|^2} = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$ , 因此  $\cos \langle a, a+2b \rangle = \frac{a \cdot (a+2b)}{|a||a+2b|} = \frac{6}{2 \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 所以向量  $a$  与向量  $a+2b$  的夹角为  $30^\circ$ .  
故选 A 项.

7. C 【解析】 记  $\angle MAD = \theta$ , 则  $\angle MAB = \frac{\pi}{2} - \theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\vec{MC} \cdot \vec{MD} = (\vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DC}) \cdot (\vec{MA} + \vec{AD}) =$

$$\begin{aligned} & \vec{MA}^2 + 2\vec{MA} \cdot \vec{AD} + \vec{MA} \cdot \vec{DC} + \vec{DC} \cdot \vec{AD} + \vec{AD}^2 = 2 + \\ & 2\vec{MA} \cdot \vec{AD} + \vec{MA} \cdot \vec{AB} = 2 - 2\cos \theta - \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \\ & 2 - 2\cos \theta - \sqrt{2} \sin \theta = 2 - \sqrt{6} \sin(\theta + \varphi), \tan \varphi = \sqrt{2}, \varphi \in \\ & \left( 0, \frac{\pi}{2} \right), \text{ 所以当 } \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right) \text{ 时, } \vec{MC} \cdot \vec{MD} \text{ 取} \\ & \text{最小值 } 2 - \sqrt{6}. \text{ 故选 C 项.} \end{aligned}$$



8. C 【解析】 在  $\triangle ABO$  中,  $\angle ABO = 120^\circ, \angle BAO = 30^\circ$ , 所以  $\angle AOB = 30^\circ$ , 又  $AB = 60$ , 由正弦定理可得  $\frac{AB}{\sin \angle AOB} = \frac{AO}{\sin \angle ABO}$ ,  $AO = \frac{AB \sin \angle ABO}{\sin \angle AOB} = \frac{60 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} =$

$60\sqrt{3}$ , 在  $\text{Rt}\triangle APO$  中,  $\tan 30^\circ = \frac{OP}{AO} = \frac{OP}{60\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 所以  $OP = 60$  m. 故选 C 项.

### 二、选择题

9. AD 【解析】 因为  $i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$ , A 项正确; 复数  $-2-i$  的虚部为  $-1$ , B 项错误; 若  $z=i$ , 则  $z^2=-1, |z|=1$ , C 项错误; 设  $z_1=a+bi, z_2=c+di(a, b, c, d \in \mathbf{R})$ , 所以  $z_1 z_2 = ac - bd + (ad + bc)i, |z_1 z_2| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = |z_1| |z_2|$ , D 项正确. 故选 AD 项.

10. BC 【解析】 对于 A 项, 因为  $\vec{NC} = \frac{2}{3}\vec{AC}$ , 所以  $\vec{NC} = 2\vec{AN}$ , 则  $\vec{BN} = \frac{2}{3}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BC}$ , 故 A 项错误; 对于 B 项和 C 项, 因为 A, M, Q 三点共线, 由共线定理可知存在实数  $\lambda$ , 使得  $\vec{BQ} = \lambda \vec{BM} + (1-\lambda)\vec{BA} = \frac{\lambda}{2}\vec{BC} + (1-\lambda)\vec{BA}$ . 设  $\vec{BQ} = \mu \vec{BN}$ , 所以  $\frac{\lambda}{2}\vec{BC} + (1-\lambda)\vec{BA} =$

· 数学 ·

参考答案及解析

$$\frac{\mu}{3}\vec{BC} + \frac{2\mu}{3}\vec{BA}, \text{ 所以 } \begin{cases} \frac{\lambda}{2} = \frac{\mu}{3}, \\ 1 - \lambda = \frac{2\mu}{3}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}, \\ \mu = \frac{3}{4}, \end{cases} \vec{BQ} =$$

$$\frac{1}{2}\vec{BM} + \frac{1}{2}\vec{BA} \Rightarrow \vec{BA} + \vec{AQ} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AM}) + \frac{1}{2}\vec{BA} \Rightarrow$$

$$\vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{AM}, \text{ 显然 } \vec{AQ} = \vec{QM} \text{ 成立, 因为 } \vec{BQ} = \frac{3}{4}\vec{BN}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } \vec{BQ} = 3\vec{QN}, \text{ 故 B, C 项正确; 对于 D 项, 因为 } \vec{BM} =$$

$$\frac{1}{2}\vec{BC}, \text{ 所以 M 是 BC 的中点, 因此 } \vec{QB} + \vec{QC} = 2\vec{QM}, \text{ 由}$$

$$\text{上可知 } \vec{AQ} = \vec{QM}, \text{ 得 } \vec{QA} = -\vec{QM}, \vec{QA} + \vec{QB} + \vec{QC} = \vec{QA} + 2\vec{QM} = \vec{QM} \neq 0, \text{ 故 D 项错误. 故选 BC 项.}$$

11. ACD 【解析】由  $a+b=(1, -1)$  可得  $(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2 = 2$ , 故  $a \cdot b = 0$ ,  $a \cdot (a+b) = a^2 + a \cdot b = 1$ , A 项错误;  $|a+b| = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{2}$ , C 项错误;  $\cos \langle a, a+b \rangle = \frac{a \cdot (a+b)}{|a| \cdot |a+b|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 故  $a$  与  $a+b$  的夹角为  $\frac{\pi}{4}$ , D 项错误;  $a$  在  $a+b$  上投影向量的坐标为  $\frac{a \cdot (a+b)}{|a+b|} \cdot \frac{a+b}{|a+b|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times (1, -1) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ , B 项正确. 故选 ACD 项.

12. ABD 【解析】因为  $a^2 + b^2 - c^2 = ab \sin C$ , 所以  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab \sin C}{2ab} = \frac{\sin C}{2}$ , 所以  $\tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = 2$ , 故 A 项正确; 因为  $a \cos B + b \sin A = c$ , 利用正弦定理可得  $\sin A \cos B + \sin B \sin A = \sin C$ , 因为  $C = \pi - (A+B)$ , 所以  $\sin C = \sin[\pi - (A+B)] = \sin(A+B)$ , 所以  $\sin A \cos B + \sin B \sin A = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ , 即  $\sin B \sin A = \cos A \sin B$ . 因为  $B \in (0, \pi)$ , 所以  $\sin B \neq 0$ , 所以  $\tan A = 1$ , 又  $A \in (0, \pi)$ , 所以  $A = \frac{\pi}{4}$ , 故 B 项正确; 因为  $\tan C = 2$ ,  $C \in (0, \pi)$ , 所以  $\sin C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  $\cos C = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 所以  $\sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ , 因为  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ , 所以  $b = \frac{a \sin B}{\sin A} =$

$$\frac{\sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2}, \text{ 故 C 项错误; } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C =$$

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times 3\sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 6, \text{ 故 D 项正确. 故选 ABD 项.}$$

### 三、填空题

13.  $\sqrt{5}$  【解析】因为  $z=1-i$ , 所以  $z+3i=1-i+3i=1+2i$ , 所以  $|z+3i| = |1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ .

14. 3 【解析】由题意得正四棱台的对角面  $A_1ACC_1$  为等腰梯形, 其中上底长为  $5\sqrt{2}$ , 下底长为  $7\sqrt{2}$ , 对角线长为 9, 则高为  $\sqrt{9^2 - (6\sqrt{2})^2} = 3$ .

15. 1 【解析】由题和正弦定理得  $(\sqrt{2} \sin A - \sin B) \tan B = \sin B \tan C$ , 则有  $(\sqrt{2} \sin A - \sin B) \frac{\sin B}{\cos B} = \sin B \frac{\sin C}{\cos C}$ , 整理得  $\sqrt{2} \sin A \cos C = \sin B \cos C + \cos B \sin C = \sin(B+C) = \sin A$ . 因为  $A \in (0, \pi)$ , 所以  $\sin A \neq 0$ , 则  $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 因为  $C \in (0, \pi)$ , 所以  $C = \frac{\pi}{4}$ , 又  $a = \sqrt{2}c$ , 则由正弦定理有  $\sin A = \sqrt{2} \sin C = 1$ , 因为  $A \in (0, \pi)$ , 所以  $A = \frac{\pi}{2}$ , 所以  $B = \frac{\pi}{4}$ , 所以  $b=c$ , 所以  $\frac{b}{c} = 1$ .

16.  $\frac{3}{5}$  【解析】设  $c=(x, y)$ , 则  $c-a=(x-1, y-2)$ , 因为  $(c-a) \parallel b$ ,  $b=(1, -1)$ , 所以  $y-2=-(x-1)$ , 即  $x+y=3$ . 又  $a+b=(2, 1)$ ,  $(a+b) \perp c$ , 所以  $(a+b) \cdot c = 2x+y=0$ . 由  $\begin{cases} x+y=3, \\ 2x+y=0, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x=-3, \\ y=6, \end{cases}$  所以  $c=(-3, 6)$ . 设  $c$  与  $a$  的夹角为  $\theta$ , 则  $\cos \theta = \frac{a \cdot c}{|a| \cdot |c|} = \frac{3}{5}$ , 即  $c$  与  $a$  夹角的余弦值为  $\frac{3}{5}$ .

### 四、解答题

17. 解: (1)  $z_1 = (1+i)^2 = 2i$ , (1分)  
 $z_2 = \frac{1+2i}{-1+2i} = \frac{(1+2i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ . (4分)  
 (2) 设复数  $z = x + yi$  (其中  $x, y \in \mathbb{R}$ ).  
 由  $\frac{z+1}{z_1} = \overline{\left(\frac{z+1}{z_1}\right)}$ , 得  $\frac{y}{2} - \frac{x+1}{2}i = \frac{y}{2} + \frac{x+1}{2}i$ ,  
 所以  $-\frac{x+1}{2} = \frac{x+1}{2}$ , 解得  $x = -1$ . (6分)

高一

· 数学 ·

由  $z+z_2=\overline{z+z_2}$ , 得  $x+\frac{3}{5}+(y-\frac{4}{5})i=x+\frac{3}{5}-(y-\frac{4}{5})i$ ,

所以  $y-\frac{4}{5}=-\left(y-\frac{4}{5}\right)$ , 解得  $y=\frac{4}{5}$ , (8分)

所以  $z=-1+\frac{4}{5}i$ ,  $|z|=\sqrt{(-1)^2+(\frac{4}{5})^2}=\frac{\sqrt{41}}{5}$ . (10分)

18. 解: (1)  $a=(1, -1)$ , 所以  $|a|=\sqrt{2}$ ,

所以  $a \cdot b=|a||b|\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{2} \times 1 \times \frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ . (4分)

(2) 因为  $(a-b) \perp b$ , 所以  $(a-b) \cdot b=0$ ,

所以  $a \cdot b-b^2=0$ , 所以  $a \cdot b=1$ . (7分)

令  $a$  与  $b$  的夹角为  $\theta$ , 则  $\cos\theta=\frac{a \cdot b}{|a||b|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ , (10分)

因为  $\theta \in [0, \pi]$ , 所以  $\theta=\frac{\pi}{4}$ ,

故  $a$  与  $b$  的夹角为  $\frac{\pi}{4}$ . (12分)

19. (1) 证明: 因为  $A+B+C=\pi$ ,

所以  $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\cos B$ .

根据正弦定理有  $a=b\cos C+c\cos B$ . (4分)

(2) 解: 由  $\frac{2a-b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$  可得  $2a\cos C=b\cos C+c\cos B=a$ ,

所以  $\cos C=\frac{1}{2}$ . (6分)

在  $\triangle ABC$  中, 由余弦定理可得  $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ,

即  $49=64+b^2-8b$ , 解得  $b=3$  或  $b=5$ ,

因此  $\triangle ABC$  的周长为 18 或 20. (12分)

20. 解: (1) 正方体的体积为  $60^3=216\ 000\text{ cm}^3$ ,

石凳的体积为正方体的体积减去 8 个正三棱锥的体积, 其中一个小正三棱锥的三条侧棱长为 30 cm,

故一个小正三棱锥的体积为  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 30^2 \times 30=4\ 500\text{ cm}^3$ , (4分)

故石凳的体积为  $216\ 000-4\ 500 \times 8=180\ 000\text{ cm}^3$ . (6分)

(2) 石凳的表面由 6 个正方形和 8 个正三角形组成, 其中正方形和正三角形的边长均为  $30\sqrt{2}\text{ cm}$ ,

则石凳的表面积为  $6 \times (30\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2} \times 30\sqrt{2} \times 30\sqrt{2} \cdot$

$\sin 60^\circ \times 8=(3\ 600\sqrt{3}+10\ 800)\text{ cm}^2$ , (10分)

则粉刷一个石凳需要  $\frac{3\ 600\sqrt{3}+10\ 800}{10\ 000} \times 50=(54+18\sqrt{3})$  元. (12分)

21. 解: (1) 因为  $M$  为  $AB$  上靠近  $B$  的三等分点, 所以可得

$$\overrightarrow{MA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}),$$

又  $CB \parallel OA$ , 且  $CB=\frac{1}{2}OA$ , 所以  $\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ , (3分)

$$\text{则 } \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{MA}$$

$$=\overrightarrow{OA}-\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$

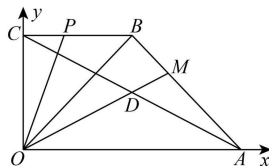
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}.$$

$$\text{即 } \overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}. \quad (6分)$$

(2) 根据题意, 因为  $OA \perp OC$ , 故以  $O$  为坐标原点, 建立如图所示平面直角坐标系,



设  $OA=2$ , 则  $A(2, 0), C(0, 1), B(1, 1), O(0, 0)$ , (8分)

因为点  $P$  在  $CB$  上运动, 故可设其坐标为  $(m, 1), 0 \leq m \leq 1$ ,

$$\text{则 } \overrightarrow{OB}=(1, 1), \overrightarrow{CA}=(2, -1), \overrightarrow{OP}=(m, 1),$$

$$\text{由 } \overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{CA}+\mu\overrightarrow{OP}, \text{ 可得 } 1=2\lambda+\mu m, 1=-\lambda+\mu,$$

$$\text{则 } \mu=\frac{3}{m+2}, \lambda=\mu-1,$$

因为  $m \in [0, 1]$ , 所以  $m+2 \in [2, 3]$ ,

$$\text{故 } \mu \in \left[1, \frac{3}{2}\right], \lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \quad (12分)$$

22. 解: (1) 若选①,  $2bc\sin A=\sqrt{3}(b^2+c^2-a^2)$ ,

由余弦定理得  $2bc\sin A=2\sqrt{3}bccos A$ ,

所以  $\sin A=\sqrt{3}\cos A$ , (4分)

· 数学 ·

参考答案及解析

又  $A \in (0, \pi)$ , 所以  $\tan A = \sqrt{3}, A = \frac{\pi}{3}$ . (6分)

若选②, 根据正弦定理边化角得  $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C - \sin B - \sin C = 0$ ,

$\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C - \sin(A+C) - \sin C = 0$ ,

所以  $\sqrt{3} \sin A \sin C - \cos A \sin C - \sin C = 0$ ,

又  $C \in (0, \pi), \sin C \neq 0$ ,

所以  $\sqrt{3} \sin A - \cos A = 1$ ,

所以  $2 \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ , (4分)

因为  $A \in (0, \pi), A - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ ,

所以  $A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, A = \frac{\pi}{3}$ . (6分)

(2) 由正弦定理边化角得  $\sin B \sin C = \sin C \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin C \cos B$ , (7分)

因为  $B, C \in (0, \pi), \sin C \neq 0$ ,

所以  $\sin B = \cos B, B = \frac{\pi}{4}$ ,

又  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ , 可得  $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = 2\sqrt{6}$ , (9分)

由  $A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{\pi}{4}$ , 得  $C = \frac{5\pi}{12}$ ,

得  $\sin C = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ , (11分)

所以  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = 6 + 2\sqrt{3}$ . (12分)

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

