2022-2023 学年度高二年级期末质量检测

数　学

本试卷共 5 页，22 题，全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1．答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡的指定位置。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净，再选涂其它答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{x|1<x<3\}$，$B=\{0,1,2\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{2\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{1,2\}$　　D．$\{0,1,2\}$

2．若 $a+2i=i(b+i)$ (a，$b\in\mathbf{R}$)，其中 i 是虚数单位，则 $a+b=$

A．-1　　B. 1　　C．-3　　D. 3

3．某地 GDP 的年平均增长率为 6.5%，按此增长率计算，要使该地 GDP 翻两番，至少需要（取：lg1.065≈0.0273，lg2≈0.3010，结果精确到整数）

A．20 年　　B．21 年　　C．22 年　　D．23 年

4．已知圆锥的表面积为 $a\ \mathrm{m}^2$，且它的侧面展开图是一个半圆，则这个圆锥的底面直径为

A．$\dfrac{\sqrt{3\pi a}}{3\pi}$ m　　B．$\dfrac{2\sqrt{3\pi a}}{3\pi}$ m　　C．$\dfrac{\sqrt{\pi a}}{\pi}$ m　　D．$\dfrac{2\sqrt{\pi a}}{\pi}$ m

5．已知直线 $y=x+m$ 与圆 O：$x^2+y^2=4$ 交于 A，B 两点，且△AOB 为等边三角形，则 m 的值为

A．$\pm\sqrt{2}$　　B．$\pm\sqrt{3}$　　C．± 2　　D．$\pm\sqrt{6}$

6．购买同一种物品，可以用两种不同的策略，第一种是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品的数量一定；第二种是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品所花的钱一定. 假设连续两天购买该物品，第一天物品的价格为 p_1，第二天物品的价格为 p_2，且 $p_1\neq p_2$，则以下选项正确的为

A．第一种方式购买物品的单价为 $\dfrac{p_1p_2}{p_1+p_2}$

B．第二种方式购买物品的单价为 $\dfrac{p_1+p_2}{2}$

C．第一种方式购买物品所用单价更低

D．第二种方式购买物品所用单价更低

7．已知函数 $f(x)=\sin(\dfrac{\pi}{3}+2x)+\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$，则该函数的单调递增区间是

A．$[-\dfrac{5\pi}{24}+k\pi,\ \dfrac{7\pi}{24}+k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$　　B．$[-\dfrac{7\pi}{24}+k\pi,\ \dfrac{5\pi}{24}+k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$

C．$[-\dfrac{\pi}{24}+k\pi,\ \dfrac{11\pi}{24}+k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$　　D．$[\dfrac{\pi}{24}+k\pi,\ \dfrac{13\pi}{24}+k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$

8．设 $a=e^{0.02}-1$，$b=2\left(e^{0.01}-1\right)$，$c=\sin 0.01+\tan 0.01$，则

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$　　C．$c>a>b$　　D．$b>c>a$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．已知 $\alpha\in[0,\pi]$，则方程 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 表示的曲线的形状可以是

A．两条直线　　B．圆

C．焦点在 x 轴上的椭圆　　D．焦点在 x 轴上的双曲线

10．已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$，则

A．$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{10}$　　B．$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$

C．$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角　　D．$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\dfrac{1}{5}\boldsymbol{b}$

11．在 A、B、C 三个地区爆发了流感，这三个地区分别有 6%，5%，4%的人患了流感. 假设这三个地区的人口数的比为 5∶7∶8，现从这三个地区中任意选取一个人，则

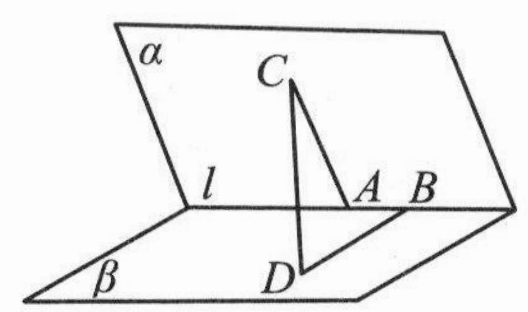
A．这个人患流感的概率为 0.0485

B．此人选自 A 地区且患流感的概率为 0.06

C．如果此人患流感，此人选自 A 地区的概率为 $\dfrac{30}{97}$

D．如果从这三个地区共任意选取 100 人，则平均患流感的人数为 4 人

12．如图，已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱上有两个点 A，B，线段 BD 与 AC 分别在这个二面角的两个面内，则



A．直线 AC 和直线 BD 为异面直线

B. 若 $AC=AB=BD=2$，则四面体 $ABCD$ 体积的最大值为 2

C. 若 $AC=3$，$AB=6$，$BD=4$，$CD=7$，$AC\perp l$，$BD\perp l$，则二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$

D. 若二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$，$AC=AB=BD=6$，$AC\perp l$，$BD\perp l$，则过 A、B、C、D 四点的球的表面积为 84π

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 展开式中含 x^4 项的系数为________.

14. 某次体检中，甲班学生体重检测数据的平均数是 55 kg，方差为 16；乙班学生体重检测数据的平均数是 60 kg，方差为 21. 又甲、乙两班人数之比为 3∶2，则甲、乙两班全部学生体重的方差为________.

15. 已知直线与抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）交于 A，B 两点，且 $OA\perp OB$，$OD\perp AB$ 交 AB 于点 D，点 D 的坐标为（1，2），则△AOB 的面积为________.

16. 已知函数 $f(x)=xe^{2x}-1$，若 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant mx+\ln x$，则实数 m 的取值范围是________.

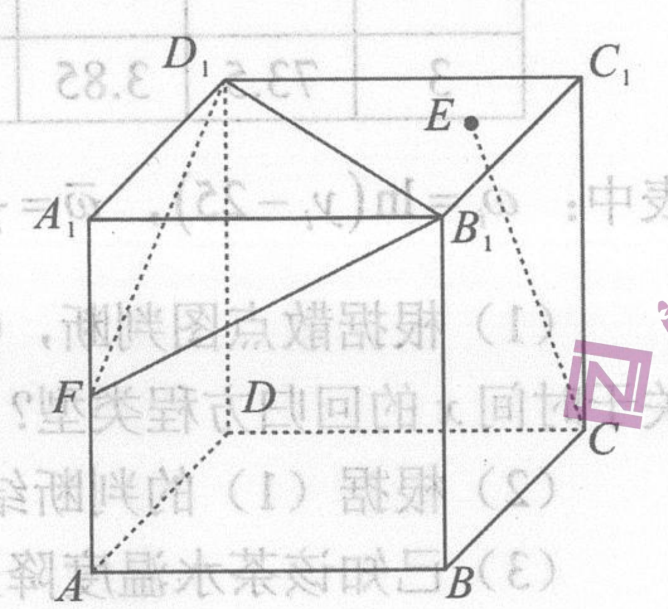
四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的上底面内有一点 E，点 F 为线段 AA_1 的中点.

（1）经过点 E 在上底面画一条直线 l 与 CE 垂直，并说明画出这条线的理由；

（2）若 $\overrightarrow{A_1E}=2\overrightarrow{EC_1}$，求 CE 与平面 FB_1D_1 所成角的正切值.



18. （12 分）

给出以下条件：① $\tan A\tan C-\sqrt{3}\tan A=1+\sqrt{3}\tan C$；② $\left(2c-\sqrt{3}a\right)\cos B=\sqrt{3}b\cos A$；

③ $\left(a-\sqrt{3}c\right)\sin A+c\sin C=b\sin B$. 请在这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中并作答.

问题：在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且________.

（1）求角 B 的大小；

（2）已知 $c=b+1$，且角 A 只有一解，求 b 的取值范围.

19. （12 分）

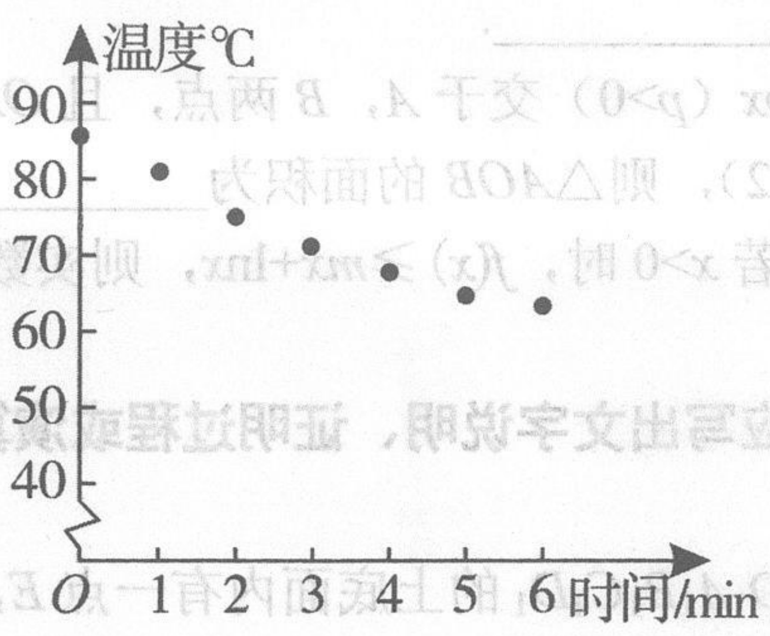
已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，且满足 $a_{n+1}+a_n=3\times2^n$.

（1）求证：$\{a_n-2^n\}$ 是等比数列；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

20. （12 分）

中国茶文化博大精深，饮茶深受大众喜爱，茶水的口感与茶叶类型和水的温度有关. 某数学建模小组为了获得茶水温度 y ℃关于时间 x min 的回归方程模型，通过实验收集在 25 ℃室温，用同一温度的水冲泡的条件下，茶水温度随时间变化的数据，并对数据做初步处理得到下面的散点图及一些统计量的值.



$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{\omega}$	$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(\omega_i-\bar{\omega})$
3	73.5	3.85	28	−95	−2.24

表中：$\omega_i=\ln\left(y_i-25\right)$，$\bar{\omega}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}\omega_i$.

（1）根据散点图判断，① $y=a+bx$ 与② $y=d\cdot c^x+25$ 哪一个更适宜作为该茶水温度 y 关于时间 x 的回归方程类型?（给出判断即可，不必说明理由）

（2）根据（1）的判断结果及表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程；

（3）已知该茶水温度降至 60 ℃时口感最佳，根据（2）中的回归方程，求在相同条件下冲泡的茶水，大约需要放置多长时间才能达到最佳饮用口感?

附：①对于一组数据 (u_1,v_1)，(u_2,v_2)，…，(u_n,v_n)，其回归直线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2},\quad \hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u};$$

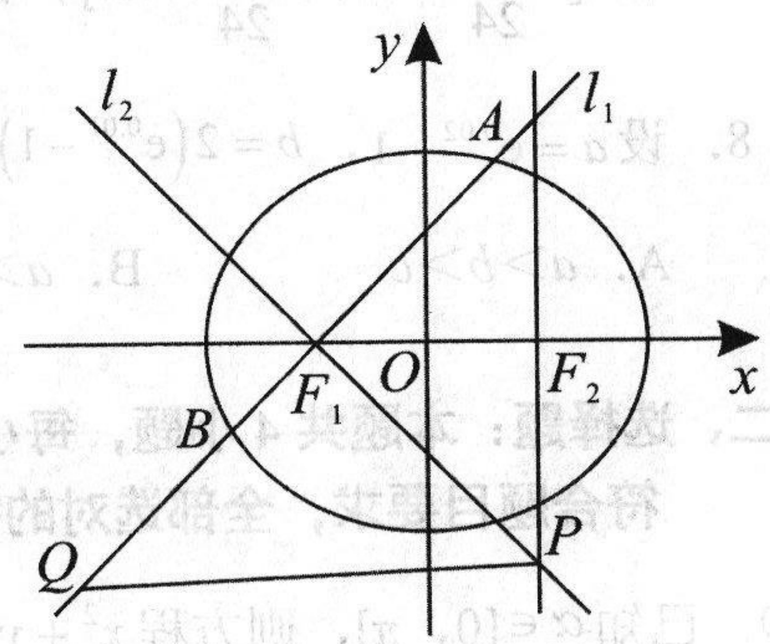
② $e^{-0.08}\approx0.92$，$e^{4.09}\approx60$，$\ln7\approx1.9$，$\ln3\approx1.1$，$\ln2\approx0.7$.

21.（12 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，点 F_1，F_2 为 C 的左、右焦点，经过 F_1 且垂直于椭圆长轴的弦长为 3.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 F_1 分别作两条互相垂直的直线 l_1，l_2，且 l_1 与椭圆交于 A，B 两点，l_2 与直线 $x=1$ 交于点 P，若 $\overrightarrow{AF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1B}$，且点 Q 满足 $\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{QB}$，求线段 PQ 的最小值.



22.（12 分）

已知函数 $f(x)=a\sin x-x+\frac{1}{x+1}(x>-1)$，且 0 为 $f(x)$ 的一个极值点.

（1）求实数 a 的值；

（2）证明：

（i）函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上存在唯一零点；

（ii）$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}<\sum\limits_{k=2}^{n}\sin\frac{1}{k^2}<1$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$.