2022–2023 学年度第一学期期末考试高三数学评分标准

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1--8：B C A D　A B D C

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

9．ABD　　10．ACD　　11．BCD　　12．BCD

三、填空题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$\frac{1}{2}$；　14．19；　15．$\sqrt{2}$；　16．(1) 2；(2) $\frac{256\pi}{81}$．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17．(10 分)

解：(1) 由正弦定理得：$bc\cos A+2ac\cos B=3ab\cos C$ ……………… 2 分

由余弦定理得：$bc\cdot(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})+2ac\cdot(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})=3ab\cdot(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})$ ……4 分

所以 $(b^2+c^2-a^2)+2(a^2+c^2-b^2)=3(a^2+b^2-c^2)$

化简得 $a^2+2b^2=3c^2$，所以 $\frac{a^2+2b^2}{c^2}=3$ ……………… 5 分

(2)由余弦定理：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-\frac{1}{3}(a^2+2b^2)}{2ab}$ ……………… 6 分

$=\frac{\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{3}b^2}{2ab}=\frac{1}{6}(\frac{2a}{b}+\frac{b}{a})$ ……………… 7 分

$\geq\frac{1}{6}\times2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ……………… 9 分

当仅当 $b=\sqrt{2}a$（即 $a:b:c=\sqrt{3}:\sqrt{6}:\sqrt{5}$）时取等号

所以 $\cos C$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ……………… 10 分

18．(12 分)

解：(1) 由题知：因为 $CE\perp EG, CE\perp EF, EG\cap EF=E$，

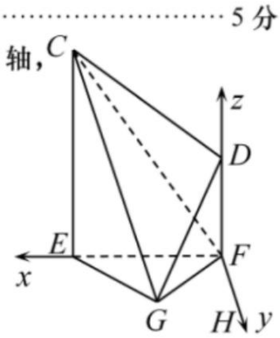
所以 $CE\perp$ 平面 EFG ……………… 3 分

又因为 $CE\subset$ 平面 $CEFD$，平面 $EFG\perp$ 平面 $CEFD$ ……………… 4 分

(2) 在平面 EFG 内过点 F 做 EF 的垂线 FH，

因为平面 $EFG\perp$ 平面 $CEFD$，所以 $FH\perp$ 平面 $CEFD$ ……………… 5 分

如图，以 F 为坐标原点，直线 FE，FH，FD 分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系 ……………… 6 分



则 $F(0,0,0),C(1,0,2),G(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0),D(0,0,1)$ ……… 7 分

所以 $\overrightarrow{FD}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{FG}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0),\overrightarrow{FC}=(1,0,2)$ ……… 8 分

设平面 CFG 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$，

因为 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{FG}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{FC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\dfrac{a}{2}+\dfrac{\sqrt{3}b}{2}=0\\ a+2c=0\end{cases}$，取 $b=2$，从而 $\vec{n}=(-2\sqrt{3},2,\sqrt{3})$ ……………… 11 分

所以 D 到平面 CFG 的距离为 $h=\dfrac{|\overrightarrow{FD}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}=\dfrac{\sqrt{57}}{19}$ ……………… 12 分

19. (12 分)

解：(1) 方案一：选条件①.

因为数列 $\{S_n+a_1\}$ 为等比数列

所以 $(S_2+a_1)^2=(S_1+a_1)(S_3+a_1)$，即 $(2a_1+a_2)^2=2a_1(2a_1+a_2+a_3)$ ……………… 2 分

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 $a_1=1$

所以 $(2+q)^2=2(2+q+q^2)$，解得 $q=2$ 或 $q=0$（舍）……………… 5 分

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}\ (n\in\mathrm{N}^*)$ ……………… 6 分

方案二：(1) 选条件②.

当 $n\geq 2$ 时，因为 $2^n a_1+2^{n-1}a_2+\cdots+2a_n=na_{n+1}\ (n\in\mathrm{N}^*)$ …①

所以 $2^{n-1}a_1+2^{n-2}a_2+\cdots+2a_{n-1}=(n-1)a_n$

所以 $2^n a_1+2^{n-1}a_2+\cdots+2^2a_{n-1}=2(n-1)a_n$ …② ……………… 3 分

①−②得 $2a_n=na_{n+1}-2(n-1)a_n$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2\ (n\geq 2)$ ……………… 4 分

当 $n=1$ 时，$2a_1=a_2$，$\dfrac{a_2}{a_1}=2$ 适合上式 ……………… 5 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}\ (n\in\mathrm{N}^*)$ ……………… 6 分

(2) 由题知：$4T_n=b_n\cdot b_{n+1}, 4T_{n+1}=b_{n+1}\cdot b_{n+2}$

两式做差得：$4(T_{n+1}-T_n)=b_{n+1}\cdot b_{n+2}-b_n\cdot b_{n+1}$

所以 $4b_{n+1}=b_{n+1}(b_{n+2}-b_n)$，得 $b_{n+2}-b_n=4$ ……………… 8 分

所以 $\{b_{2k}\}\ (k\in\mathrm{N}^*)$ 为首项 $b_2=4$，公差等于 4 的等差数列，

所以 $b_{2k}=4+(k-1)\times 4=4k$

同理：$\{b_{2k-1}\}\ (k\in\mathrm{N}^*)$ 为首项 $b_1=2$，公差等于 4 的等差数列，

所以 $b_{2k-1}=2+(k-1)\times 4=4k-2$

所以 $b_n=2n$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{2n}[(-1)^i b_i b_{i+1}]=\sum\limits_{i=1}^{2n}4(-1)^i i(i+1)$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{2n}4(-1)^i i(i+1)=4[(-2+6)+(-12+20)+\cdots+4n]=8n^2+8n$ ……………… 12 分

20.（12分）

解：（1）由题知：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}n_i\ln y_i-5\times\overline{n}\cdot\overline{\ln y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}n_i^2-5\times\overline{n}^2}=\dfrac{53-5\times3.8\times3}{55-45}=-\dfrac{4}{10}=-0.4$ ……1分

所以 $a=3.8+0.4\times3=5$， ……2分

所以线性回归方程为：$\ln y=-0.4n+5$ ……3分

所以，估计 $n=10$ 时，$y=e\approx3$ ……4分

（2）由题知：X 的取值可能为 $0,1,2$ ……5分

记"含红球的行数为 k"为事件 $A_k(k=0,1,2)$，记"每列都有白球"为事件 B，

所以 $P(X=0)=P(A_0|B)=\dfrac{P(A_0B)}{P(B)}=\dfrac{p^4}{[1-q^2]^2}=\dfrac{1}{25}$ ……6分

$P(X=1)=P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}=\dfrac{C_4^1p^3q+C_2^1p^2q^2}{[1-q^2]^2}=\dfrac{16}{25}$ ……7分

$P(X=2)=P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}=\dfrac{C_2^1(pq)^2}{[1-q^2]^2}=\dfrac{8}{25}$ ……8分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
$P(X=k)$	$\dfrac{1}{25}$	$\dfrac{16}{25}$	$\dfrac{8}{25}$

所以数学期望为 $E(X)=0\times\dfrac{1}{25}+1\times\dfrac{3}{25}+2\times\dfrac{8}{25}=\dfrac{32}{25}$ ……10分

（3）证明：因为每一列至少一个红球的概率为 $(1-p^m)^n$

记"不是每一列都至少一个红球"为事件 A，所以 $P(A)=1-(1-p^m)^n$ ……11分

记"每一行都至少一个白球"为事件 B，所以 $P(B)=(1-q^n)^m$

显然，$A\subseteq B$，所以 $P(A)\le P(B)$，所以 $(1-p^m)^n+(1-q^n)^m\ge1$ ……12分

21.（12分）

解：（1）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),E(x_3,y_3),F(x_4,y_4)$

因为 $2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=3(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})$，所以 $x_1+x_2=\dfrac{3}{2}(x_3+x_4)$ ……1分

由 $\begin{cases}y=kx+m\\y=bx\end{cases}$，得 $x_1=\dfrac{m}{b-k}$；同理可得 $x_2=-\dfrac{m}{b+k}$ ……3分

所以 $x_1+x_2=\dfrac{2km}{b^2-k^2}$ ……4分

由 $\begin{cases}y=kx+m\\\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，所以 $x_3+x_4=-\dfrac{4km}{1+2k^2}$ …… 5分

所以$\dfrac{2km}{b^2-k^2}=-\dfrac{6km}{1+2k^2}$，即$3k^2-3b^2=1+2k^2$，解得$b=\sqrt{3}$

所以双曲线C的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ ………………………… 6分

（2）由（1）得$A(\dfrac{-m}{k-\sqrt{3}},\dfrac{-\sqrt{3}m}{k-\sqrt{3}})$，$B(\dfrac{-m}{k+\sqrt{3}},\dfrac{-\sqrt{3}m}{k+\sqrt{3}})$

所以$|OA|=\sqrt{\dfrac{4m^2}{(k-\sqrt{3})^2}}=|\dfrac{2m}{k-\sqrt{3}}|$，$|OB|=\sqrt{\dfrac{4m^2}{(k+\sqrt{3})^2}}=|\dfrac{2m}{k+\sqrt{3}}|$ ………… 8分

$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\angle AOB\ \dfrac{1}{2}\times|\dfrac{4m^2}{k^2-3}|\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=|\dfrac{\sqrt{3}m^2}{k^2-3}|$ ………………… 9分

由$\begin{cases}y=kx+m\\x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得$(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0$ ………………………… 10分

因为直线l与双曲线C相切，

所以$\Delta=4k^2m^2+4(3-k^2)(m^2+3)=0$

即$m^2-k^2+3=0$ ………………………………………… 11分

所以$S_{\Delta OAB}=|\dfrac{\sqrt{3}m^2}{k^2-3}|=\sqrt{3}$为定值 ………………………………… 12分

22.（12分）

解：（1）由题知：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$g(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$ ………… 1分

因为$f'(x)=\ln x+1$ ………………………………………… 2分

所以，当$x\in(0,\dfrac{1}{e})$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,\dfrac{1}{e})$上单调递减；

当$x\in(\dfrac{1}{e},+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(\dfrac{1}{e},+\infty)$上单调递增；

所以$f(x)\geq f(\dfrac{1}{e})=0$ ………………………………………… 3分

又因为$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-a$，

若$a\leq0$，则$g'(x)>0$，$g(x)$在$(-1,+\infty)$上无最大值；………………… 4分

若$a>0$，$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-a=0$，解得$x=\dfrac{1}{a}-1$；

所以，当$x\in(-1,\dfrac{1}{a}-1)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(-1,\dfrac{1}{a}-1)$上单调递增；

当$x\in(\dfrac{1}{a}-1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(\dfrac{1}{a}-1,+\infty)$上单调递减；

所以，$g(x)\leq g(\dfrac{1}{a}-1)=a-\ln a-1=0$

令 $h(a)=a-\ln a-1(a>0)$，则 $h'(a)=1-\frac{1}{a}$

所以，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

所以 $h(a)\ge h(1)=0$

综上，$a=1$ ………………………………………………………… 5 分

（2）要证明：$\ln x>\mathrm{e}^{-x}-\frac{2}{\mathrm{e}x}$；只需证 $x\ln x+\frac{1}{\mathrm{e}}>x\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{\mathrm{e}}$ ………………… 7 分

由（1）知：$f(x)\ge 0$，当仅当 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时取等号；

只需证：$x\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{\mathrm{e}}\le 0$（等号不同取）………………………………… 8 分

设 $p(x)=x\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{\mathrm{e}}$，则 $p'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x}$，

所以，$p(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$p(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

所以，$p(x)\le p(1)=0$，当仅当 $x=1$ 时取等号

综上，命题得证 ………………………………………………………… 9 分

（3）要证明：$[1+\frac{1}{2m(m+1)}]^{m+1}>\mathrm{e}^{\frac{1}{2m+2}}$；

只需证 $(m+1)\ln[1+\frac{1}{2m(m+1)}]>\frac{1}{2(m+1)}$

即证 $\ln[1+\frac{1}{2m(m+1)}]>\frac{1}{2(m+1)^2}$ ………………………………… 10 分

设 $\varphi(x)=\ln(1+x)-\frac{m}{m+1}x$，$x=\frac{1}{2m(m+1)}\in(0,\frac{1}{m})$；

所以 $\varphi'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{m}{m+1}=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+\frac{1}{m}}>0$ ………………………… 11 分

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,\frac{1}{m})$ 上单调递增，$\varphi(x)>\varphi(0)=0$

所以，$\varphi(\frac{1}{2m(m+1)})=\ln(1+\frac{1}{2m(m+1)})-\frac{1}{2(m+1)^2}>0$

综上，$[1+\frac{1}{2m(m+1)}]^{m+1}>\mathrm{e}^{\frac{1}{2m+2}}$ 成立 ……………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。