# 2022—2023 学年度第二学期期末质量检测

# 高二理科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1.A　2.B　3.B　4.D　5.D　6.C　7.C　8.A　9.C　10.B　11.B　12.C

二、填空题（本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. $\exists x\in \mathrm{R},\sin x>1$　14. 乙　15. $\sqrt{5}$　16. 4

三、解答题（本大题共 6 个小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.（本小题满分 10 分）解：（1）$z=\dfrac{2+4m\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(2+4m\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=1-2m+(2m+1)\mathrm{i}$ .

因为 $z$ 是纯虚数，所以 $1-2m=0$ 且 $2m+1\neq 0$，　解得 $m=\dfrac{1}{2}$ .

（2）因为 $\overline{z}$ 是 $z$ 的共轭复数，所以 $\overline{z}=1-2m-(2m+1)\mathrm{i}$.

所以 $\overline{z}+2z=1-2m-(2m+1)\mathrm{i}+2[1-2m+(2m+1)\mathrm{i}]$

$=3-6m+(2m+1)\mathrm{i}$.

因为复数 $\overline{z}+2z$ 在复平面上对应的点在第一象限，

所以 $\begin{cases}3-6m>0\\2m+1>0\end{cases}$

解得 $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}$，即实数 $m$ 的取值范围为$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$.

18.（本小题满分 12 分）

解:（1）一般性的命题：$n$ 是正整数，则 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}>\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$

（2）命题是真命题.

要证：$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}>\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$，

只需证明：$\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}>\sqrt{n+2}+\sqrt{n}$

只需证明：$(2\sqrt{n+1})^2>(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})^2$

整理得：$n+1>\sqrt{n(n+2)}$

只需证明：$(n+1)^2>[\sqrt{n(n+2)}]^2$

只需证明：1>0，而此式显然成立，所以原不等式成立.

19.（本小题满分 12 分）解：（1）因为 $a_1=2$， $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}(n\quad 2)$，

所以 $a_2=\dfrac{a_1}{2a_1+1}=\dfrac{2}{2\times2+1}=\dfrac{2}{5}$，同理 $a_3=\dfrac{\frac{2}{5}}{2\times\frac{2}{5}+1}=\dfrac{2}{9}$， $a_3=\dfrac{\frac{2}{9}}{2\times\frac{2}{9}+1}=\dfrac{2}{13}$，

即 $a_2=\dfrac{2}{5}$， $a_3=\dfrac{2}{9}$， $a_4=\dfrac{2}{13}$；

（2）猜想 $a_n=\dfrac{2}{4n-3}$，

证明如下：

①当 $n=1$ 时， $a_1=2$，显然满足题意，

②设 $n=k,(k\geqslant2$ 且 $k\in\mathbf{N})$ 时， $a_k=\dfrac{2}{4k-3}$，

则 $a_{k+1}=\dfrac{a_k}{2a_k+1}=\dfrac{\frac{2}{4k-3}}{2\times\frac{2}{4k-3}+1}=\dfrac{2}{4k+1}=\dfrac{2}{4(k+1)-3}$，

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立，

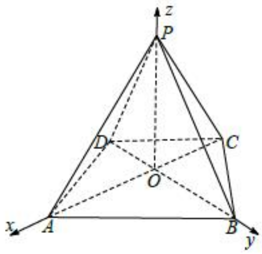
综上可得 $a_n=\dfrac{2}{4n-3}$.

20.（本小题满分 12 分）解:(1)在等腰梯形 $ABCD$ 中，$OA=OB=2$，$\because AB=2\sqrt{2}$，

$\therefore AB^2=OA^2+OB^2$，所以 $OA\perp OB$，即 $AC\perp BD$，

又因为 $PB\perp AC$，且 $BD\cap PB=B$，BD⊂平面 PBD，PB⊂平面 PBD. 所以 $AC\perp$ 平面 $PBD$，

又因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，因此平面 $PBD\perp$ 平面 $ABCD$.




(2)如图，连接 $PO$，由(1)知， $AC\perp$ 平面 $PBD$，所以 $AC\perp PO$，

所以 $PO=\sqrt{PA^2-OA^2}=2$，

所以 $PB^2=PO^2+OB^2$，即 $PO\perp OB$，

又$\because OA\perp OB$，$\therefore$以 $OA,OB,OP$ 所在直线分别为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴建立空间直角坐标系，

则 $A(2,0,0)$，$D(0,-1,0)$，$P(0,0,2)$，

设平面 $PAD$ 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，因为 $\overrightarrow{PA}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{PD}=(0,-1,-2)$，

所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x-2z=0,\\ -y-2z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，则 $x=1$，$y=-2$，所以平面 $PAD$ 的一个法向量 $\vec{n}=(1,-2,1)$，

$\because AC\perp$ 平面 $PBD$，$\therefore$平面 $PBD$ 的一个法向量 $\overrightarrow{m}=(1,0,0)$，

所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

所以二面角 $A-PD-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

21.（本小题满分 12 分）解:(1)由题意得 $b=\sqrt{3}$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{6}$，

$\therefore$椭圆 $C$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

(2)由题目可知 $l$ 不是直线 $y=0$，且 $F_1(-\sqrt{3},0)$、$F_2(\sqrt{3},0)$，

设直线 $l$ 的方程为 $x=my-\sqrt{3}$，点 $B(x_1,\ y_1)$、$D(x_2,\ y_2)$，代入椭圆方程，整理得：$(m^2+2)y^2-2\sqrt{3}my-3=0$，$\therefore y_1+y_2=\dfrac{2\sqrt{3}m}{m^2+2}$①，$y_1\cdot y_2=-\dfrac{3}{m^2+2}$②，

由 $x_1=my_1-\sqrt{3}$，$x_2=my_2-\sqrt{3}$ 得：$x_1+x_2=-\dfrac{4\sqrt{3}}{m^2+2}$③，$x_1\cdot x_2=\dfrac{6-6m^2}{m^2+2}$④，

$\because \overrightarrow{F_2B}=(x_1-\sqrt{3},\ y_1)$，$\overrightarrow{F_2D}=(x_2-\sqrt{3},\ y_2)$，由题意知 $\overrightarrow{F_2B}\cdot\overrightarrow{F_2D}=0$，

$\therefore x_1\cdot x_2-\sqrt{3}(x_1+x_2)+y_1\cdot y_2+3=0$，将①②③④代入上式并整理得 $m^2=7$，$\therefore m=\pm\sqrt{7}$，

因此，直线 $l$ 的方程为 $x-\sqrt{7}y+\sqrt{3}=0$ 或 $x+\sqrt{7}y+\sqrt{3}=0$.

22.（本小题满分 12 分）解:(1)$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，

由题意得 $f'(x)=x-\frac{a}{x}(x>0)$，∴当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$的单调递增区间为$(0，+\infty)$.

当 a>0 时，$f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}=\frac{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}{x}$.

∴当 $0<x<\sqrt{a}$ 时，$f'(x)<0$，

当 $x>\sqrt{a}$ 时，$f'(x)>0$.

∴当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$的单调递增区间为$(\sqrt{a}，+\infty)$，单调递减区间为$(0，\sqrt{a})$.

(2)设 $g(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\ln x(x>1)$，

则 $g'(x)=2x^2-x-\frac{1}{x}$.

∵当 $x>1$ 时，$g'(x)=\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x}>0$，

∴$g(x)$在$(1，+\infty)$上是增函数.

∴$g(x)>g(1)=\frac{1}{6}>0$.

即 $\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\ln x>0$，

∴ $\frac{1}{2}x^2+\ln x<\frac{2}{3}x^3$，

故当 $x>1$ 时，$\frac{1}{2}x^2+\ln x<\frac{2}{3}x^3$ 恒成立.