

## 数学试卷

### 注意事项:

1. 答题前, 考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.
2. 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.
3. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回. 满分 150 分, 考试用时 120 分钟.

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求)

1. 已知  $z=(1+2i)(3-4i)$ , 则  $z$  的虚部为  
A. 2                      B. 2i                      C. -2                      D. -2i
2. 已知  $A=\{x|y=x+\frac{1}{x}-3\}$ ,  $B=\{x|y=\log_2(x+3)+5\}$ , 则集合  $A \cup B =$   
A.  $[-1, +\infty)$                       B.  $\mathbf{R}$   
C.  $(-3, +\infty)$                       D.  $(-\infty, -5] \cup [-1, +\infty)$
3.  $(x+\frac{2}{x})^5$  的展开式中  $x$  的系数为  
A. 10                      B. 40                      C. 30                      D. 20
4. 已知数列  $\{a_n\}$  为等比数列,  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 且  $S_3=1$ ,  $S_6=3$ , 则  $a_{10}+a_{11}+a_{12} =$   
A. 8                      B. 5                      C. 6                      D. 7
5. 已知点  $P$  为椭圆  $C: \frac{x^2}{4}+y^2=1$  上的一个动点, 点  $F_1, F_2$  分别为椭圆  $C$  的左、右焦点, 当  $\triangle F_1F_2P$  的面积为 1 时,  $\angle F_1PF_2 =$   
A.  $\frac{2\pi}{3}$                       B.  $\frac{\pi}{6}$                       C.  $\frac{\pi}{4}$                       D.  $\frac{\pi}{2}$
6. 已知  $x=0$  是函数  $f(x)=x^2e^x-2xe^x+2e^x-\frac{a}{3}x^3$  的一个极值点, 则  $a$  的取值集合为  
A.  $\{a|a \geq -1\}$                       B.  $\{0\}$                       C.  $\{1\}$                       D.  $\mathbf{R}$
7. 某款对战游戏, 总有一定比例的玩家作弊. 该游戏每 10 个人组成一组对局, 若一组对局中有作弊玩家, 则认为这组对局不公平. 现有 50 名玩家, 其中有 2 名玩家为作弊玩家, 一次性将 50 名玩家平均分为 5 组, 则 5 组对局中, 恰有一组对局为不公平对局的概率为  
A.  $\frac{7}{20}$                       B.  $\frac{1}{6}$                       C.  $\frac{9}{49}$                       D.  $\frac{1}{5}$

8. 已知球  $O$  的半径为 4, 在  $\triangle ABC$  中,  $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ,  $BC=2\sqrt{11}$ , 且  $\triangle ABC$  的三个顶点都在球  $O$  的表面,  $\triangle ABC$  所在平面将球分为较大部分和较小部分, 点  $P$  是较大部分球面上的一个动点, 当二面角  $P-BC-A$  的余弦值为  $-\frac{3}{5}$  时,  $\triangle PBC$  所在平面与球面的交线长为  
A.  $5\sqrt{3}\pi$                       B.  $2\sqrt{3}\pi$                       C.  $3\sqrt{3}\pi$                       D.  $4\sqrt{3}\pi$

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 设函数  $f(x)=2\sin(\omega x)+2\cos(\omega x)$ ,  $\omega>0$ , 已知  $f(x)$  的两条相邻对称轴的间距为  $\frac{\pi}{2}$ , 则下列命题正确的有  
A.  $\omega=2$   
B.  $f(x)$  取最大值为  $2\sqrt{2}$   
C.  $f(x)$  在  $(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4})$  上单调递增  
D.  $(\frac{3\pi}{8}, 0)$  是  $f(x)$  的一个对称中心
10. 如图 1, 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别为  $AB, BC$  的中点, 则下列结论正确的是  
A.  $A_1E \perp B_1C_1$   
B. 平面  $AA_1D_1D$  中的任意一条直线与  $C_1F$  平行  
C.  $A_1E, BB_1, C_1F$  三条直线有公共点  
D. 正方体中的任意一条棱所在直线与直线  $AB_1$  的夹角都是  $\frac{\pi}{4}$

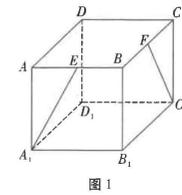


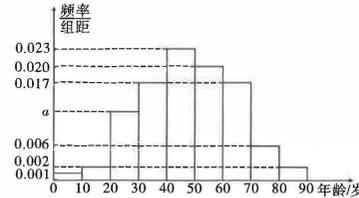
图 1

11. 已知直线  $l: (2+m)x+(2m+1)y+m-1=0$ , 圆  $O: (x-1)^2+(y+2)^2=4$ , 则下列命题正确的是  
A.  $\forall a \in \mathbf{R}$ , 点  $A(4, a)$  在圆外  
B.  $\exists m \in \mathbf{R}$ , 使得直线  $l$  与圆  $O$  相切  
C. 当直线  $l$  与圆  $O$  相交于  $PQ$  时, 交点弦  $|PQ|$  的最小值为  $2\sqrt{3}$   
D. 若在圆  $O$  上仅存在三个点到直线  $l$  的距离为 1,  $m$  的值为 -2
12. 已知  $f(x)=x^3-(3a+2)x^2+b+6a$ , 若函数  $f(x)$  有三个零点  $p, 2, q$ , 且  $p<2<q$ , 则下列结论正确的是  
A.  $b=6a$                       B.  $a \leq \frac{1}{4}$                       C.  $p>-1$                       D.  $q-p>3$

三、填空题 (本大题共4小题, 每小题5分, 共20分)

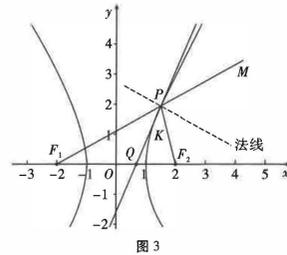
13. 在平面直角坐标系中,  $\vec{a}=(2, -1)$ ,  $\vec{b}=(k, \frac{5}{2})$ , 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 则 $k=$ \_\_\_\_\_.

14. 在某地区进行流行病学调查, 随机调查了200位某种疾病患者的年龄, 得到了如图2的样本数据的频率分布直方图, 根据图中信息估计该地区这种疾病患者的年龄位于[10, 30)的概率为\_\_\_\_\_.



15. 函数 $f(x) = \frac{3e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ,  $x \in [-5, 5]$ , 记 $f(x)$ 的最大值为 $M$ , 最小值为 $m$ , 则 $M+m=$ \_\_\_\_\_.

16. 双曲线具有如下光学性质: 从一个焦点发出的光线, 经双曲线反射后, 反射光的反向延长线经过另一个焦点. 如图3, 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

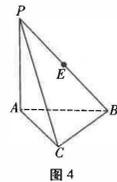


( $a, b > 0$ ),  $F_1, F_2$  为双曲线 $C$ 的左、右焦点. 某光线从 $F_2$ 出发照射到双曲线右支的 $P$ 点, 经过双曲线的反射后, 反射光线 $PM$ 的反向延长线经过 $F_1$ . 双曲线在点 $P$ 处的切线与 $x$ 轴交于点 $Q$ , 若 $F_1Q = 2QF_2$ , 且反射光线所在直线的斜率为 $\frac{\sqrt{15}}{7}$ , 则双曲线的离心率是\_\_\_\_\_.

四、解答题 (共70分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

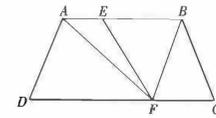
17. (本小题满分10分)  
已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,  $S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和,  $a_3=1, S_9=45$ .  
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;  
(2) 记 $b_n = a_n \cdot 2^n$ , 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$ .

18. (本小题满分12分)  
如图4, 在三棱锥 $P-ABC$ 中,  $PA \perp$ 平面 $ABC$ ,  $PA=BC=2, AB=PC=\sqrt{5}$ .  
(1) 求点 $B$ 到平面 $PAC$ 的距离;  
(2) 设点 $E$ 为线段 $PB$ 的中点, 求二面角 $A-CE-B$ 的正弦值.



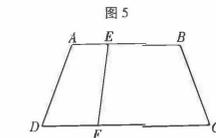
19. (本小题满分12分)

在梯形 $ABCD$ 中,  $AB \parallel CD$ ,  $E$ 是 $AB$ 上一点, 满足 $EB=2AE=2$ ,  $F$ 是 $CD$ 上一动点,  $CD=6$ .



(1) 如图5, 若 $AF=3, BF=2$ , 求 $EF$ 的长;

(2) 如图6, 若 $AD=2, BC=3$ , 且 $AD, EF, BC$ 三条直线交于同一点, 求 $EF$ 的长.



20. (本小题满分12分)

平面上一点 $P$ 满足:  $P$ 点到 $F(2, 0)$ 的距离比 $P$ 点到 $y$ 轴的距离大2, 且点 $P$ 不在一条射线上, 记点 $P$ 的轨迹方程为曲线 $C$ .

(1) 求曲线 $C$ 的方程;  
(2) 点 $Q$ 为 $y$ 轴左侧一点, 曲线 $C$ 上存在两点 $A, B$ , 使得线段 $QA, QB$ 的中点均在曲线 $C$ 上, 设线段 $AB$ 的中点为 $M$ , 证明:  $QM$ 垂直于 $y$ 轴.

21. (本小题满分12分)

运动会期间, 某班组织了一个传球游戏, 甲、乙、丙三名同学参与游戏, 规则如下: 持球者每次将球传给另一个同学. 已知, 若甲持球, 则他等可能的将球传给乙和丙; 若乙持球, 则他有 $\frac{1}{3}$ 的概率传给甲; 若丙持球, 则他有 $\frac{1}{3}$ 的概率传给甲. 游戏开始时, 由甲持球. 记经过 $n$ 次传球后甲持球的概率为 $p_n$ .

(1) 若三次传球为一轮游戏, 并且每轮游戏开始都由甲持球, 规定: 在一轮游戏中, 若在第3次传球后, 持球者是甲, 为甲胜利. 记随机变量 $X$ 为3轮游戏后甲胜利的次数, 求 $X$ 的分布列和数学期望;  
(2) 求 $p_n$ .

22. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = e^x - (6-3a)x$ .

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;  
(2) 若 $\forall x \in [0, 1]$ , 都有 $f(x) \geq x^3 + (4-a)x^2 + 6-a$ , 求 $a$ 的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：  
www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线