

湖南师大附中理科数学寒假周考试卷

时量：120 分钟 满分：150 分

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是满足题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \frac{1-x}{x} \geq 0\}$, $B = \{x | y = \lg(2x-1)\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(0, 1]$ B. $(0, \frac{1}{2})$ C. $(\frac{1}{2}, -1]$ D. $(\frac{1}{2}, \infty)$

2. 若 $a = \ln 2, b = 5^{-\frac{1}{2}}, c = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$, 则 a, b, c 的大小关系 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

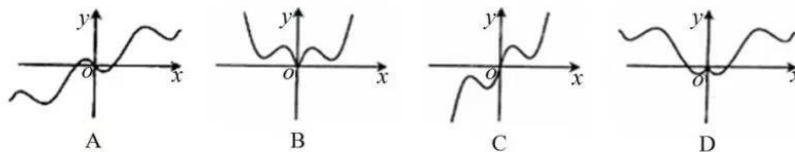
3. 已知 $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2 \cos(\pi + \alpha)$, 且 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$, 则 $\tan \beta$ 的值为 ()

- A. -7 B. 7 C. 1 D. -1

4. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_2 a_5 = 2a_3$, 且 a_4 与 $2a_7$ 的等差中项为 $\frac{5}{4}$, 则 $a_1 =$ ()

- A. 4 B. 8 C. 16 D. 32

5. 已知 $f(x) = (\frac{1}{2}x - \sin x) \cdot \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$, 则函数 $y = f(x)$ 的图象大致为 ()



6. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差为 d , 已知 $(a_1 + 1)^3 + 2019(a_1 + 1) = 1$,

$(a_{2019} + 1)^3 + 2019(a_{2019} + 1) = -1$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $d < 0, S_{2019} = 2019$ B. $d > 0, S_{2019} = 2019$
C. $d > 0, S_{2019} = -2019$ D. $d < 0, S_{2019} = -2019$

7. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $|\vec{a} + \vec{b}| = m|\vec{a}|$, 若 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$,

则 m 的值为 ()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$

8. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos(\omega x - \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2\omega}$ 个单位长度, 得到

$g(x)$ 的图象, $g(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\omega\pi}{4}$ 个单位长度, 则函数

$g(x)$ 图象的一个对称中心为 ()

- A. $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ B. $(\frac{\pi}{3}, 0)$ C. $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ D. $(-\frac{2\pi}{3}, 0)$

9. 已知在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $BC=2$, $CC_1=3$, 长方体每条棱所在直线与过点 C_1 的平面 α 所成的角都相等, 则直线 AC 与平面 α 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 1 B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 0 C. $\frac{3}{17}\sqrt{17}$ 或 0 D. $\frac{3}{17}\sqrt{17}$ 或 1

10. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 过其焦点 F 的直线与 C 交于 A, B 两点, O 是坐标原点, 记 $\triangle AOB$ 的面积为 S , 且满足 $|AB| = 3|FB| = \frac{3\sqrt{2}}{2}S$, 则 $p =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

11. 已知 5 件产品中有 2 件次品, 现逐一检测, 直至能确定所有次品为止, 记检测的次数为 ξ , 则 $E\xi =$ ()

- A. 3 B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{18}{5}$ D. 4

12. 对于函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 下列说法正确的有 ()

① $f(x)$ 在 $x = e$ 处取得极大值 $\frac{1}{e}$; ② $f(x)$ 有两个不同的零点; ③ $f(2) < f(\pi) < f(3)$;

④ 若 $f(x) < k - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 则 $k > 1$.

- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分。

13. 已知函数 $f(x) = e^x(\sin x - a)$ 有极值, 则实数 a 的取值范围为_____。

14. 已知 ^{14}C 的半衰期为 5730 年 (是指经过 5730 年后, ^{14}C 的残余量占原始量的一半)。

设 ^{14}C 的原始量为 a , 经过 x 年后的残余量为 b , 残余量 b 与原始量 a 的关系如下:

$b = ae^{-kx}$, 其中 x 表示经过的时间, k 为一个常数. 现测得湖南长沙马王堆汉墓女尸出土

时¹⁴C的残余量约占原始量的76.7%。请你推断一下马王堆汉墓的大致年代为距今

_____年。(已知 $\log_2 0.767 \approx -0.4$)

15. $\triangle AOB$ 中, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$, 且满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} - \vec{b}| = 2$, 则 $\triangle AOB$ 的面积的最大值为

_____。

16. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 作圆

$x^2 + y^2 = a^2$ 的切线交双曲线右支于点 M , 若 $\angle F_1MF_2 = \frac{\pi}{4}$, 则双曲线的离心率为

_____。

三、解答题:解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1, n \in \mathbb{N}^*$, 且 $a_1 = 1$, 设

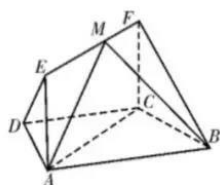
$$b_n = \frac{a_n}{2^{n-1}} + 2, n \in \mathbb{N}^*$$

(I) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 证明: 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$.

18.(本小题满分 12 分)

如图,在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD = DC = CB = 1$, $\angle ABC = 60^\circ$, 四边形 $ACFE$ 为矩形, 平面 $ACFE \perp$ 平面 $ABCD$, $CF = 1$.



(I) 求证: $BC \perp$ 平面 $ACFE$;

(II) 点 M 在线段 EF 上运动, 设平面 MAB 与平面 FCB 所成二面角为 θ ($\theta \leq 90^\circ$),

试求 $\cos \theta$ 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 左、右焦点分别为 F_1, F_2 ,

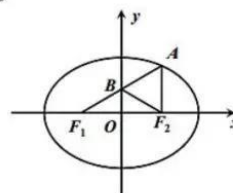
A 为椭圆 C 上一点, AF_1 与 y 轴交于 B , $|AB| = |F_2B|$, $|OB| = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 过右焦点 F_2 的直线 $y = k(x - 2) (k \neq 0)$ 交椭圆于 P, Q 两点

若 PQ 的中点为 N , O 为原点, 直线 ON 交直线 $x = 3$ 于点 M ,

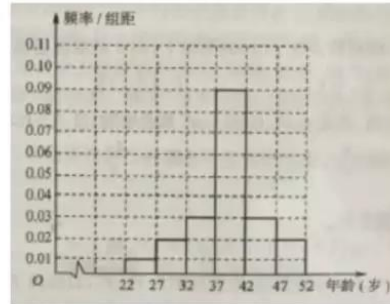
求 $\frac{|PQ|}{|MF_2|}$ 的最大值.



20. (本小题满分 12 分)

长沙是国家历史文化名城，其中著名的景点有岳麓山、橘子洲头、岳麓书院等.

(I) 为了解“十·一”国庆节当天某旅游景点游客年龄的分布情况，从年龄在 22 岁到 52 岁的游客中随机抽取了 1000 人，制成了如下的频率分布直方图：



现从年龄在[42,52]内的游客中，采用分层抽样的方法抽取 10 人，再从抽取的 10 人中随机抽取 4 人，记 4 人中年龄在[47,52]内的人数为 ξ ，求 $P(\xi = 3)$ ；

(II) 为了给游客提供更舒适的旅游体验，该旅游景点游船中心计划在 2020 年国庆节当日投入至少 1 艘至多 3 艘 A 型游船供游客乘坐观光。由 2010 到 2019 这 10 年间的资料显示每年国庆节当日客流量 X (单位: 万人) 都大于 1，将每年国庆节当日客流量数据分成 3 个区间整理得下表：

国庆节当日客流量 X	$1 < X < 3$	$3 \leq X \leq 5$	$X > 5$
频数 (年)	2	4	4

以这 10 年的数据资料记录的 3 个区间客流量的频率作为每年客流量在该区间段发生的概率，且每年国庆节当日客流量相互独立。

该游船中心希望投入的 A 型游船尽可能被充分利用，但每年国庆节当日 A 型游船最多使用量 (单位: 艘) 要受当日客流 X (单位: 万人) 的影响，其关联关系如下表：

国庆节当日客流量 X	$1 < X < 3$	$3 \leq X \leq 5$	$X > 5$
A 型游船最多使用量	1	2	3

若某艘 A 型游船在国庆节当日被投入且被使用，则游船中心当日可获得利润 3 万元；若当日被投入却不被使用，则游船中心当日损失 0.5 万元。记 Y (单位: 万元) 表示该游船中心在国庆节当日获得的总利润， Y 的数学期望越大游船中心在国庆节当日获得的总利润越大，问该游船中心在 2020 年国庆节当日应投入多少艘 A 型游船才能使其当日获得的总利润最大？

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x+1)e^x + \frac{1}{2}ax^2 + 2ax, a \in R$.

(I) 讨论 $f(x)$ 极值点的个数;

(II) 若 $x_0 (x_0 \neq -2)$ 是 $f(x)$ 的一个极值点, 且 $f(-2) > e^{-2}$, 证明: $f(x_0) < 1$.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

已知直线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + 2\cos\theta \\ y = 1 + 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数). 以原点 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求曲线 C 的极坐标方程;

(II) 若直线 $l: \theta = \alpha$ ($\alpha \in [0, \pi)$, $\rho \in R$) 与曲线 C 相交于 A, B 两点, 设线段 AB 的中点为 M , 求 $|OM|$ 的最大值.

23. [选修 45: 不等式选讲] (10 分)

已知 $f(x) = |x| + |2x - 1|$.

(I) 解关于 x 的不等式 $f(x) > 4$;

(II) 对任意正数 a, b , 求使得不等式 $f(x) < \frac{3}{a^2} + \frac{3}{b^2} + \frac{3}{8}ab$ 恒成立的 x 的取值集合 M .

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站(www.zizzs.com)和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2019-2020 学年高三月考试题及参考答案（更新下载中），[点击链接](#)获得

<http://www.zizzs.com/c/201910/39637.html>