

洛阳市 2022—2023 学年高二质量检测

数学试卷(理) 参考答案

一、选择题

CBDAC CABBD AB

二、填空题

13. 240 14. 10 15. 15 16. ①②③

三、解答题

17. (1) 展开式中第 2 项、第 3 项、第 4 项的二项式系数分别为 C_n^1, C_n^2, C_n^3 ,
依题意得 $2C_n^2 = C_n^1 + C_n^3$,2 分

即 $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2}$, 解得 $n = 7$ ($n = 2$ 舍去).

所以 $n = 7$5 分

(2) 因为 $(2x + \frac{1}{\sqrt{x}})^7$ 展开式的通项为 $T_{k+1} = C_7^k (2x)^{7-k} (\frac{1}{\sqrt{x}})^k = 2^{7-k} C_7^k x^{\frac{14-3k}{2}}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 7$,
.....7 分

所以当 $\frac{14-3k}{2} = -2$ 时, $k = 6$,9 分

所以含有 $\frac{1}{x^2}$ 的项为 $\frac{14}{x^2}$10 分

18. (1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 q} = \frac{2}{a_1 q^2}$, 即 $1 - \frac{1}{q} = \frac{2}{q^2}$,
解得 $q = 2$ 或 $q = -1$2 分

若 $q = -1$, 则 $S_6 = 0$, 与 $S_6 = 63$ 矛盾, 不符合题意, $\therefore q = 2$3 分

$\therefore S_6 = \frac{a_1(1-2^6)}{1-2} = 63$,

$\therefore a_1 = 1$. $\therefore a_n = 2^{n-1}$5 分

(2) $\because b_n$ 是 $\log_2 a_n$ 和 $\log_2 a_{n+1}$ 的等差中项,

$\therefore b_n = \frac{1}{2}(\log_2 a_n + \log_2 a_{n+1}) = \frac{1}{2}(\log_2 2^{n-1} + \log_2 2^n) = n - \frac{1}{2}$7 分

$\therefore b_{n+1} - b_n = 1$ 即 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, 以 1 为公差的等差数列.8 分

设 $\{(-1)^n b_n^2\}$ 的前 $2n$ 项和为 T_{2n} ,

则 $T_{2n} = (-b_1^2 + b_2^2) + (-b_3^2 + b_4^2) + \dots + (-b_{2n-1}^2 + b_{2n}^2)$
 $= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_{2n-1} + b_{2n}$ 10 分

$= \frac{b_1 + b_{2n}}{2} \cdot 2n = \frac{\frac{1}{2} + 2n - \frac{1}{2}}{2} \cdot 2n = 2n^2$12 分

高二数学(理)答案 第1页 (共4页) (2023.6)

19. (1) 以 $\{\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AP}\}$ 为单位正交基底, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$, 因为 $AP = AB = AD = 1$,

所以 $A(0,0,0), B(1,0,0), D(0,1,0), P(0,0,1)$,1 分

设 $C(1,y,0)$, 则 $\vec{PB} = (1,0,-1), \vec{CD} = (-1,1-y,0)$.

.....2 分

因为直线 PB 与 CD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$,

所以 $|\cos \langle \vec{PB}, \vec{CD} \rangle| = \frac{|\vec{PB} \cdot \vec{CD}|}{|\vec{PB}| |\vec{CD}|} = \frac{1}{2}$,

.....3 分

即 $\frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{1+(1-y)^2}} = \frac{1}{2}$, 解得 $y = 2 (y = 0 \text{ 舍})$,

所以 $C(1,2,0)$, $\therefore BC$ 的长为 2.

.....5 分

(2) 设平面 PBD 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x,y,z)$.

因为 $\vec{PB} = (1,0,-1), \vec{PD} = (0,1,-1)$,

则 $\begin{cases} \vec{PB} \cdot \vec{n}_1 = 0, \\ \vec{PD} \cdot \vec{n}_1 = 0. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x - z = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$

令 $x = 1$, 则 $y = 1, z = 1$, 所以 $\vec{n}_1 = (1,1,1)$,

.....7 分

同理求得平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (1,0,1)$.

.....9 分

所以 $\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

.....11 分

$\therefore$ 二面角 $D-PB-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

.....12 分

20. (1) 由题意得 $T(2,0)$, 且 GQ 是 PT 的中垂线, 所以 $|PG| = |GT|$.

又 $|GS| + |GT| = |GS| + |GP| = |PS| = 2\sqrt{6} > 4 = |ST|$,

.....2 分

所以点 G 的轨迹是以 S, T 为焦点的椭圆,

.....3 分

设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

因此 $a = \sqrt{6}, c = 2$, 所以 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{2}$,

.....4 分

因此曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

.....5 分

(2) 易知直线 l 与坐标轴不垂直, 设 $l: x = ty - 2$, 代入 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

整理得 $(t^2 + 3)y^2 - 4ty - 2 = 0$,

.....6 分

设 OA 与 MN 交于点 B , 则 B 是 OA, MN 的中点, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), B(x_0, y_0)$,

则 $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2t}{t^2 + 3}$,

从而 $x_0 = ty_0 - 2 = \frac{-6}{t^2 + 3}$.

.....8 分

所以点 A 的坐标为 $(\frac{-12}{t^2 + 3}, \frac{4t}{t^2 + 3})$,

.....9 分

高二数学(理)答案 第2页 (共4页) (2023.6)

因为点 A 在曲线 $C: x^2 + 3y^2 = 6$ 上, 所以 $(\frac{-12}{t^2+3})^2 + 3(\frac{4t}{t^2+3})^2 = 6$,10 分

整理得 $t^4 - 2t^2 - 15 = 0$,

解得 $t^2 = 5$ ($t^2 = -3$ 舍去), $\therefore t = \pm \sqrt{5}$11 分

故直线 l 的方程为 $x \pm \sqrt{5}y + 2 = 0$12 分

21. (1) 根据题意, 列联表完成如下:

性别	是否体验汉服		合计
	体验汉服	没有体验汉服	
女	180	100	280
男	40	80	120
合计	220	180	400

.....2 分

零假设为 H_0 : 性别与体验汉服之间无关联.

.....3 分

根据列联表数据, 经计算得到

$$\chi^2 = \frac{400 \times (180 \times 80 - 100 \times 40)^2}{280 \times 120 \times 220 \times 180} \approx 32.516 > 10.828 = \chi_{0.001}^2 \quad \text{.....4 分}$$

根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 推断 H_0 不成立,

即认为体验汉服与性别之间有关联, 此推断犯错误的概率不超过 0.001.5 分

(2) 由数据可得,

$$r = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i y_i - 7\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7\bar{x}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^7 y_i^2 - 7\bar{y}^2}} = \frac{1827 - 7 \times 9 \times 22}{\sqrt{727 - 7 \times 9^2} \cdot \sqrt{4648 - 7 \times 22^2}}$$

$$= \frac{441}{\sqrt{160} \cdot \sqrt{1260}} = \frac{441}{120 \sqrt{14}} \approx 0.98, \quad \text{.....8 分}$$

$\therefore 0.98 > 0.75$,

$\therefore$ 线性相关程度很强, 可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系.9 分

$$(3) \text{ 由数据及公式可得, } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i y_i - 7\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7\bar{x}^2} = \frac{441}{160} \approx 2.8, \quad \text{.....10 分}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 22 - 2.8 \times 9 = -3.2.$$

所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $y = 2.8x - 3.2$11 分

当 $x = 18$ 万元时, 销售额预计为 $y = 47.2$ 万元.12 分

22. (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = x - 2a + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 2ax + 1}{x}$,1 分

$\because f(x)$ 是增函数, 所以 $f'(x) = \frac{x^2 - 2ax + 1}{x} \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

$\therefore x^2 - 2ax + 1 \geq 0$ 对任意 $x > 0$ 恒成立,2 分

即 $2a \leq x + \frac{1}{x}$ 对任意 $x > 0$ 恒成立,3 分

又 $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$, 当且仅当 $x = 1$ 时等号成立.4 分

$\therefore 2a \leq 2$, 即 $a \leq 1$.

故 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$5 分

(2) 若 $f(x)$ 在定义域内有两个极值点, 则 x_1, x_2 是方程 $f'(x) = 0$ 即 $x^2 - 2ax + 1 = 0$ 的两个不等正实根.6 分

从而得 $\begin{cases} \Delta > 0, \\ x_1 + x_2 = 2a > 0, \text{ 即 } a > 1, \text{ 而 } 0 < x_1 < x_2, \text{ 则 } x_2 > 1, \\ x_1 x_2 = 1 > 0, \end{cases}$ 7 分

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \left(\frac{1}{2}x_1^2 - 2ax_1 + \ln x_1\right) - \left(\frac{1}{2}x_2^2 - 2ax_2 + \ln x_2\right) \\ &= \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) - 2a(x_1 - x_2) + (\ln x_1 - \ln x_2) \\ &= \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) - (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + \ln \frac{x_1}{x_2} \\ &= \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2 + \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2x_2^2} + \ln \frac{1}{x_2^2}, \end{aligned}$$

.....10 分

令 $t = x_2^2 > 1$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = g(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2t} - \ln t$,

$$g'(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t}\right)^2 > 0,$$

.....11 分

$\therefore g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(t) > g(1) = 0$, 即 $g(t)$ 的值域是 $(0, +\infty)$.

所以 $f(x_1) - f(x_2)$ 的范围是 $(0, +\infty)$12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线