2022学年第一学期期中测试

高三数学试题卷

考生须知：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分，共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，在答题卷指定区域填写班级、姓名、考场号、座位号及准考证号。
3. 所有答案必须写在答题卷上，写在试卷上无效；
4. 考试结束后，只需上交答题卷。

选择题部分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid x<5\}$，$B=\{x\mid 1<x<7\}$，则 $(C_R A)\cap B=$ （　　）

A. $[5,7]$　　B. $[5,7)$　　C. $(5,7]$　　D. $(5,7)$

2. 已知复数 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则 $\frac{1}{z}+\bar{z}$ 等于 （　　）

A. -1　　B. 0　　C. $-\sqrt{3}i$　　D. $-1-\sqrt{3}i$

3. 已知 $\vec{a}=(2,4)$，$\vec{b}=(1,1)$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上投影向量为 （　　）

A. $3\sqrt{2}$　　B. $(3,3)$　　C. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$　　D. $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

4. 正整数 2160 的不同正因数的个数为 （　　）

A. 20　　B. 28　　C. 40　　D. 50

5. “北溪”管道泄漏事件的爆发，使得欧洲能源供应危机成为举世瞩目的国际公共事件。随着管道泄漏，大量天然气泄漏使得超过 8 万吨类似甲烷的气体扩散到海洋和大气中，将对全球气候产生灾难性影响。假设海水中某种环境污染物含量 P（单位：mg/L）与时间 t（单位：天）间的关系为：$P=P_0\cdot e^{-kt}$，其中 P_0 表示初始含量，k 为正常数。令 $\mu=\left|\frac{P_2-P_1}{t_2-t_1}\right|$ 为 $[t_1,t_2]$ 之间海水稀释效率，其中 P_1,P_2 分别表示当时间为 t_1 和 t_2 时的污染物含量。某研究团队连续 20 天不间断监测海水中该种环境污染物含量，按照 5 天一期进行记录，共分为四期，即 $(0,5]$，$(5,10]$，$(10,15]$，$(15,20]$ 分别记为 I 期，II 期，III 期，IV 期，则下列哪个时期的稀释效率最高 （　　）

A. I 期　　B. II 期　　C. III 期　　D. IV 期

6. 已知 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 5$，$c=\log_4 8$，则 a,b,c 的大小关系是 （　　）

A. $c>a>b$　　B. $a>c>b$　　C. $b>a>c$　　D. $a>b>c$

7. 设函数 $f(x)=2x-\cos x$，设 $\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{\pi}{8}$ 的等差数列，$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_5)=5\pi$，则 $\left[f\left(a_3\right)\right]^2-a_1a_5=$ （　　）

A.0　　B.$\frac{1}{16}\pi^2$　　C.$\frac{1}{8}\pi^2$　　D.$\frac{13}{16}\pi^2$

8. 已知实数 x,y 满足：$x+2^x=2$，$2y+\log_2 y=1$，则 $x+2y$ 的值是 （　　）

A.1　　B. 2　　C. $\frac{3}{2}$　　D.$\sqrt{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 直线 l 经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F，且与抛物线相交于 A,B 两点，连接点 A 和坐标原点 O 的直线交抛物线准线于点 D，则 （　　）

A. F 坐标为 $(2,0)$　　B. $|AB|$ 最小值为 4

C. DB 一定平行于 x 轴　　D. ΔAOB 可能为直角三角形

10. 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，E、F 分别为 BC、CD 的中点，分别沿 AE、AF 及 EF 所在直线把 ΔAEB、ΔAFD 和 ΔEFC 折起，使 B、C、D 三点重合于点 P，得到三棱锥 $P-AEF$，则下列结论中正确的有 （　　）

A. 三棱锥 $P-AEF$ 的体积为 $\frac{2}{3}$

B. 面 $APF\perp$ 面 EPF

C. 三棱锥中无公共端点的两条棱称为对棱，则三棱锥 $P-AEF$ 中有三组对棱相互垂直

D. 若 M 为 AF 的中点，则过点 M 的平面截三棱锥 $P-AEF$ 的外接球，所得截面的面积的最小值为 $\frac{5\pi}{4}$

11.已知函数 $f(x)=\mathrm{A}\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})+\mathrm{B}$（A>0，$\omega$>0） （　　）

A. 若 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调，则 $0<\omega\le\sqrt{2}$

B. 将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位得到曲线 C，若曲线 C 对应的函数为偶函数，ω 最小值为 $\frac{1}{2}$

C. 函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,\ \pi)$ 上恰有三个极值点，则 $\frac{9}{4}<\omega\le\frac{13}{4}$

D. 关于 x 的方程 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{A}+\mathrm{B}$ 在 $(0,\ \pi)$ 上有两个不同的解，则 $2<\omega\le\frac{5}{2}$

12.已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在 R 上的函数，则 （　　）

A．若 $f(x+1)+f(1-x)=0$，则 $f(x)$ 的图象关于点（1，0）中心对称

B．函数 $y=f(x-1)$ 与 $y=f(1-x)$ 的图象关于关于直线 x=0 对称

C．若 $f(x)$ 是不恒为零的偶函数，且对任意实数 x 都有 $xf(x+1)=(x+1)f(x)$，则 $f(f(\frac{5}{2}))=0$

D．若方程 $x-f[g(x)]=0$ 有实数解，则 $g[f(x)]$ 不可能是 $x^2+x+\frac{1}{5}$

非选择题部分

三、填空题：本小题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中 x^2 的系数为__________.

14. 已知圆 $C:x^2+y^2=r^2$ 上恰有 2 个点到直线 $3x-4y-25=0$ 距离为 2，当 r 为正整数时，写出一个可能的 r 的值为__________.

15. 已知 $f(x)=x^3-x$，过点 $(1,t)$ 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，则 t 的范围是________.

16. 已知双曲线 $C:x^2-y^2=1$，过点 $B(0,2)$ 的动直线与 C 交于两点 P,Q，若曲线 C 上存在某定点 A 使得 $k_{PA}+k_{QA}$ 为定值 λ，则 λ^2 的值为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$\left\{\frac{a_n}{3^{n-1}}\right\}$ 成公差为 1 的等差数列.

（I）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

18. 锐角 ΔABC 中，已知 $\frac{1+\sin 2B-\cos 2B}{1+\sin 2B+\cos 2B}=\sqrt{3}$.

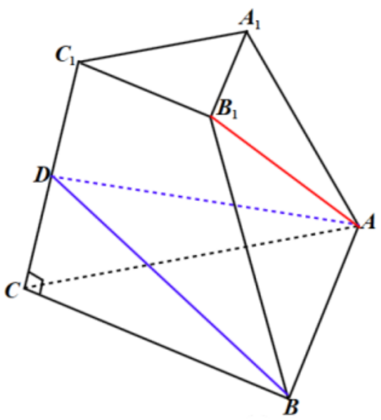
（I）求角 B；

（II）若 $a=2$，求 ΔABC 的面积 S 的取值范围.

19. 三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，ΔABC 为正三角形，$BC=2$，$CC_1=\sqrt{3}$，$B_1C_1=1$，$CC_1\perp BC$.

（I）求证：$BC\perp AB_1$；

（II）若二面角 B_1-BC-A 的平面角大小为 60^o，且在线段 CC_1 上有点 D 使得平面 DAB 平分四面体 $ABCC_1$ 的体积，求 BD 与面 BB_1A_1A 所成角的正弦值.



19题图

20. 某大学有 A，B 两个餐厅为学生提供午餐与晚餐服务，甲、乙两位学生每天午餐和晚餐都在学校就餐，近 100 天选择餐厅就餐情况统计如下：

选择餐厅情况(午餐，晚餐)	(A,A)	(A,B)	(B,A)	(B,B)
甲	30 天	20 天	40 天	10 天
乙	20 天	25 天	15 天	40 天

假设甲、乙选择餐厅相互独立，用频率估计概率.

(I) 分别估计一天中甲午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐的概率，乙午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐的概率；

(II) 记 X 为甲、乙在一天中就餐餐厅的个数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

(III) 假设 M 表示事件“A 餐厅推出优惠套餐”，N 表示事件“某学生去 A 餐厅就餐”，$P(M)>0$，一般来说在推出优惠套餐的情况下学生去该餐厅就餐的概率会比不推出优惠套餐的情况下去该餐厅就餐的概率要大，证明：$P(M\mid N)>P(M\mid \bar{N})$.

21. 如图，已知 M 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左顶点，过 M 作两条射线，分别交椭圆于点 A，B，交直线 $x=4$ 于点 C，D.

（I）若 $\angle AMB=45^o$，求 $|CD|$ 的最小值；

（II）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，当 $\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{1}{y_3}+\dfrac{1}{y_4}$，求证：直线 AB 过定点.

22. 已知函数 $f(x)=a\ln x-x^2-x$.

（Ⅰ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

（II）若 $a=-1$，函数 $F(x)=f(x)+x+1$，且 $\forall m,n\in(0,+\infty),m\neq n,|mF(n)-nF(m)|>\lambda|m-n|$，求 λ 的取值范围.

浙江省杭州市高三一模数学试卷解析

浙江上虞　　戴刚锋

1:（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 1 题）

1: 已知集合 $A=\{x|x<5\}$，$B=\{x|1<x<7\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$（　　）

A. $[5,7]$　　**B.** $[5,7)$　　**C.** $(5,7]$　　**D.** $(5,7)$

方法提供与解析：（浙江温州郑寿好）

解析：易得 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=[5,7)$；故选 B．

2:（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 2 题）

2: 已知复数 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 $\frac{1}{z}+\bar{z}$ 等于（　　）

A. -1　　**B.** 0　　**C.** $-\sqrt{3}\mathrm{i}$　　**D.** $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

方法提供与解析：

解析：$\frac{1}{z}+\bar{z}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$；故选 D．

3:（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 3 题）

3: 已知 $\vec{a}=(2,4)$，$\vec{b}=(1,1)$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上投影向量为（　　）

A. $3\sqrt{2}$　　**B.** $(3,3)$　　**C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　**D.** $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

方法提供与解析：

解析：$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上投影向量为 $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=(3,3)$；故选 B．

4:（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 4 题）

4: 正整数 2160 的不同正因数的个数为（　　）

A. 20　　**B.** 28　　**C.** 40　　**D.** 50

方法提供与解析：

解析：$2160=2^4\times3^3\times5$，所以它的不同正因数取决于 4 个 2 可以取 0~4 个，3 个 3 可以取 0~3 个，1 个 5 可以取 0 和 1 个，所以不同正因数的个数为 $5\times4\times2=40$；故选 C．

5:（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 5 题）

5:“北溪”管道泄漏事件的爆发，使得欧洲能源供应危机成为举世瞩目的国际公共事件．随着管道泄漏，大量天然气泄漏使得超过 8 万吨类似甲烷的气体扩散到海洋和大气中，将对全球气候产生灾难性影响．假设海水中某种环境污染物含量 P（单位：mg/L）与时间 t（单位：天）间的关系为：

$P=P_0\cdot e^{-kt}$，其中 P_0 表示初始含量，k 为正常数．令 $\mu=\left|\dfrac{P_2-P_1}{t_2-t_1}\right|$ 为 $[t_1,t_2]$ 之间海水稀释效率，其中 P_1，P_2 分别表示当时间为 t_1 和 t_2 时的污染物含量．某研究团队连续 **20** 天不间断监测海水中该种环境污染物含量，按照 **5** 天一期进行记录，共分为四期，即 $(0,5]$，$(5,10]$，$(10,15]$，$(15,20]$ 分别记为Ⅰ期，Ⅱ期，**Ⅲ**期，Ⅳ期，则下列哪个时期的稀释效率最高（　　）

A.Ⅰ期　　**B.**Ⅱ期　　**C.Ⅲ**期　　**D.**Ⅳ期

方法提供与解析：

解析：$\mu=\left|\dfrac{P_2-P_1}{t_2-t_1}\right|$ 表示两点 (t_1,P_1) 和 (t_2,P_2) 间的斜率绝对值，结合函数 $P=P_0\cdot e^{-kt}$ 图像的特征（递减，且越来越慢），易得Ⅰ期稀释效率最高；故选 A．

6：（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 6 题）

6.已知 $a=\log_2 3,b=\log_3 5,c=\log_4 8$，则 a,b,c 的大小关系是（　　）

A. $c>a>b$　　**B.** $a>c>b$　　**C.** $b>a>c$　　**D.** $a>b>c$

方法提供与解析：

解析：（对数）

注意到 $c=\log_4 8=\dfrac{3}{2}$，$a=\log_2 3>\log_2\left(2\sqrt{2}\right)=\dfrac{3}{2}$，$b=\log_3 5<\log_3\left(3\sqrt{3}\right)=\dfrac{3}{2}$，所以 $a>c>b$，选 **B.**

7：（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 7 题）

7.设函数 $f(x)=2x-\cos x$，设 $\{a_n\}$ 是公差为 $\dfrac{\pi}{8}$ 的等差数列，$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_5)=5\pi$，则 $\left[f(a_3)\right]^2-a_1a_5=$（　　）

A. 0　　**B.** $\dfrac{1}{16}\pi^2$　　**C.** $\dfrac{1}{8}\pi^2$　　**D.** $\dfrac{13}{16}\pi^2$

方法提供与解析：

解析：（数列，函数的综合题）

设 $a_3=x$，则 $a_1=x-\dfrac{\pi}{4},a_2=x-\dfrac{\pi}{8},a_4=x+\dfrac{\pi}{8},a_5=x+\dfrac{\pi}{4}$，

由 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_5)=5\pi$，得 $10x-\left(\sqrt{2}+2\cos\dfrac{\pi}{8}+1\right)\cos x=5\pi$，

又 $2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得 $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.所以 $10x-\left(\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}+1\right)\cos x=5\pi$.

令函数 $g(x)=10x-\left(\sqrt{2}+2\cos\dfrac{\pi}{8}+1\right)\cos x$，则 $g(x)=10+\left(\sqrt{2}+2\cos\dfrac{\pi}{8}+1\right)\sin x>0$，所以函数 $g(x)$ 单调递增，又 $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=5\pi$，所以 $a_3=x=\dfrac{\pi}{2}$.

故$\left[f\left(a_3\right)\right]^2-a_1a_5=(2x-\cos x)^2-\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{13}{16}\pi^2$.选 **D.**

8：（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 8 题）

8.已知实数 x,y 满足：$x+2^x=2,2y+\log_2 y=1$，则 $x+2y$ 的值是（　　）

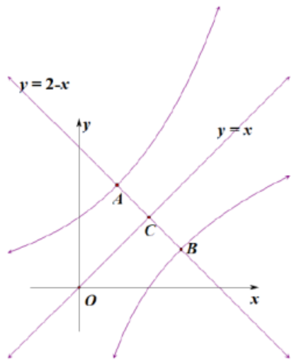
A. 1　　**B.** 2　　**C.** $\dfrac{3}{2}$　　**D.** $\sqrt{3}$

方法提供与解析：

解析：（函数的综合题）

（方法一）由题意 $2y+\log_2(2y)=2$，设 $\log_2(2y)=t$，则 $t+2^t=2$，虽然函数 $f(x)=x+2^x$ 单调递增，所以 $x=t=\log_2(2y)$，所以 $x+2y=t+2^t=2$.选 **B.**

（方法二）$x,2y$ 分别是方程 $2^x=2-x,\log_2 x=2-x$ 的解即分别是函数 $y=2^x,y=\log_2 x$ 的图像与直线 $y=2-x$ 的交点 $A\left(x_1,2^{x_1}\right),B\left(x_2,\log_2 x_2\right)$ 的横坐标.显然函数 $y=2^x,y=\log_2 x$ 是互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称，而直线 $y=2-x$ 与直线 $y=x$ 垂直，而且垂足为 $C(1,1)$.故 $C(1,1)$ 为 AB 的中点.所以 $x_1+x_2=2$，即 $x+2y=2$.选 **B.**



9：（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 9 题）

9：直线 l 经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F，且与抛物线相交于 A,B 两点，连接点 A 和坐标原点 O 的直线交抛物线准线于点 D，则（　　）

A． F 坐标为 $(2,0)$　　**B．** $|AB|$ 最小值为 **4**

C． DB 一定平行于 x 轴　　**D．** $\triangle AOB$ 可能为直角三角形

方法提供与解析：

解析：抛物线性质

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，故 $x_1x_2=1$， $y_1y_2=-4$，

A： F 坐标为 $(1,0)$，错误；

B： $|AB|_{\min}=x_1+x_2+p\geq 2\sqrt{x_1x_2}+p=4$，正确；

C： $OA:y=\frac{4}{y_1}x$，故 $D\left(-1,-\frac{4}{y_1}\right)$，因为 $y_2=\frac{-4}{y_1}=y_D$，正确；

D： 因为 $x_1x_2+y_1y_2=-3$，故 $\angle AOB$ 不为直角，$k_{OA}\cdot k_{AB}=\frac{4}{y_1}\cdot\frac{4}{y_1+y_2}=\frac{16}{y_1^2+y_1y_2}=\frac{16}{y_1^2-4}\neq-1$，故 $\angle OAB$ 不为直角，同理 $\angle OBA$ 不为直角，错误；

故选 **BC**.

10：（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 10 题）

10： 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，E、F 分别为 BC、CD 的中点，分别沿 AE、AF 及 EF 所在直线把 $\triangle AEB$、$\triangle AFD$ 和 $\triangle EFC$ 折起，使 B、C、D 三点重合于点 P，得到三棱锥 $P-AEF$，则下列结论中正确的有

（　　）

A． 三棱锥 $P-AEF$ 的体积为 $\frac{2}{3}$　　　　**B．** 面 $APF\perp$ 面 EPF

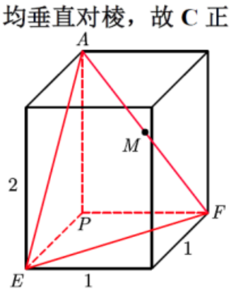
C． 三棱锥中无公共端点的两条棱称为对棱，则三棱锥 $P-AEF$ 中有三组对棱相互垂直

D． 若 M 为 AF 的中点，则过点 M 的平面截三棱锥 $P-AEF$ 的外接球，所得截面的面积的最小值为 $\frac{5\pi}{4}$

方法提供与解析：

解析：立体几何

补全成边长为 $1,1,2$ 的长方体，故 $V_{P-AEF}=\frac{1}{3}$，**A** 错误；由图得 **B** 正确；PA,PE,PF 均垂直对棱，故 **C** 正确，三棱锥 $P-AEF$ 的外接球球心 O 为体对角线的中点，



且 $PN=\sqrt{PE^2+PF^2+PA^2}=\sqrt{6}$，即球 O 的半径为 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以，过点 M 的平面截三棱锥 $P-AEF$ 的外接球所得截面圆的半径设为 r，

设球心 O 到截面圆的距离为 d，则 $0\leq d\leq OM$，且 $OM=\frac{1}{2}$，

则 $0\leq d\leq\frac{1}{2}$，$\therefore r=\sqrt{R^2-d^2}\in\left[\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$，则 $\pi r^2\in\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$，故 **D** 正确，故选 **BCD**.

11：（2022年11月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第11题）

11：已知函数 $f(x)=A\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+B(A>0,\omega>0)$ （ ）

A．若 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调，则 $0<\omega\le\sqrt{2}$

B．将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位得到曲线 C，若曲线 C 对应的函数为偶函数，ω 最小值为 $\frac{1}{2}$

C．函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上恰有三个极值点，则 $\frac{9}{4}<\omega\le\frac{13}{4}$

D．关于 x 的方程 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}A+B$ 在 $(0,\pi)$ 上有两个不同的解，则 $2<\omega\le\frac{5}{2}$

方法提供与解析：

解析：三角函数性质

A：函数在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调，故 $\frac{\pi}{2}\le\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$，故 $0<\omega\le2$，故 $\left[\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{4}\right]\subseteq\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 或 $\left[\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{4}\right]\subseteq\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，故 $\omega\in\left(0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[1,\frac{5}{3}\right]$，错误；

B：$\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，故 $\omega=\frac{1}{2}+4k$，故 ω 最小值为 $\frac{1}{2}$，正确；

C：$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$，故 $\omega\pi+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right]$，故 $\frac{9}{4}<\omega\le\frac{13}{4}$，正确；

D：$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}A+B$ 即 $\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$，故 $\omega\pi+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{9\pi}{4},\frac{11\pi}{4}\right]$，则 $2<\omega\le\frac{5}{2}$，

正确；故选 **BCD**.

12：（2022年11月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第12题）

12.已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在 R 上的函数，则（ ）

A.若 $f(x+1)+f(1-x)=0$，则 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 中心对称

B.函数 $y=f(x-1)$ 与 $y=f(1-x)$ 的图象关于关于直线 $x=0$ 对称

C.若 $f(x)$ 是不恒为零的偶函数，且对任意实数 x 都有 $xf(x+1)=(x+1)f(x)$，则 $f\left(f\left(\frac{5}{2}\right)\right)=0$

D.若方程 $x-f[g(x)]=0$ 有实数解，则 $g[f(x)]$ 不可能是 $x^2+x+\frac{1}{5}$

方法提供与解析：

解析：对于 A，显然正确；

对于 B，法 1：（特殊值）设 $f(x)=x$，则 $f(x-1)=x-1$，$f(1-x)=1-x$，作出函数 $y=x-1$ 与 $y=1-x$ 的图像，观察可知它们关于 $x=1$ 对称，故 B 不正确；

法 2：设 (x,y) 为 $y=f(x-1)$ 上任一点，因为 $y=f(1-x)=f((2-x)-1)$，所以 $y=f(1-x)$ 图像上点 $(2-x,y)$ 与 (x,y) 对应，由这两个点可知两函数关于 $x=1$ 对称，故 B 不正确；

对于 C，令 $x=0\Rightarrow f(0)=0$，令 $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，由 $xf(x+1)=(x+1)f(x)\Rightarrow\frac{f(x+1)}{x+1}=\frac{f(x)}{x}$，

所以 $\frac{f\left(\frac{5}{2}\right)}{\frac{5}{2}}=\frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}}=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\Rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right)=0$，所以 $f\left(f\left(\frac{5}{2}\right)\right)=f(0)=0$，故 C 正确；

对于 D，令 $g(x)=t$，则 $x-f[g(x)]=0\Rightarrow f(t)=x$，所以 $g[f(t)]=g(x)=t$，所以方程 $x-f[g(x)]=0$ 有实数解 $\Leftrightarrow g[f(x)]=x$ 有实数解，而 $x^2+x+\frac{1}{5}=x\Rightarrow x^2+\frac{1}{5}=0$ 显然无解，故 D 正确；

综上，选 ACD.

13：（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 13 题）

13. $\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中 x^2 的系数为________.

方法提供与解析：

解析：$T_{r+1}=C_6^r\left(2\sqrt{x}\right)^{6-r}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_6^r\cdot 2^{6-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{3-r}$，令 $3-r=2\Rightarrow r=1$，所以 x^2 的系数为 $C_6^1\cdot 2^5\cdot(-1)=-192$，故填 -192.

14：（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 14 题）

14. 已知圆 $C:x^2+y^2=r^2$ 上恰有 2 个点到直线 $3x-4y-25=0$ 距离为 2，当 r 为正整数时，写出一个可能的 r 的值为________.

方法提供与解析：

解析：圆心到直线的距离为 $d=\frac{|-25|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$，要使恰有 2 个点到直线的距离为 2，则 $3<r<7$，所以 $r=4$，5，6.故填 4，5，6 中任何一个.

15：（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 15 题）

15：已知 $f(x)=x^3-x$，过点 $(1,t)$ 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，则 t 的范围是________.

方法提供与解析：

解析：导数的切线问题

设切点为$\left(x_0,x_0^3-x_0\right)$，$f'(x)=3x^2-1$，

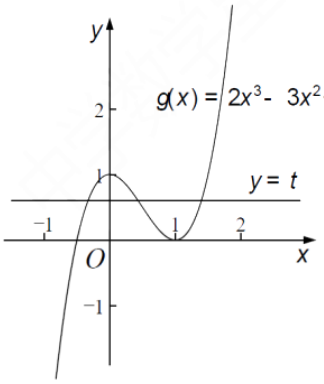
∴过点$(1,t)$的切线的斜率为$k=f'(x_0)=3x_0^2-1=\dfrac{x_0^3-x_0-t}{x_0-1}$，即$-t=2x_0^3-3x_0^2+1$，

∴ $y=-t$与$g(x)=2x^3-3x^2+1$有 3 个交点；

$g'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$，令$g'(x)=0\Rightarrow x=0$或$x=1$；

∴ x，$g'(x)$，$g(x)$的符号变化如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	极大值 $f(0)=1$	↘	极小值 $f(1)=0$	↗



∴ $-t\in(0,1)$，故$t\in(-1,0)$.

16：（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 16 题）

16：已知双曲线$C:x^2-y^2=1$，过点$B(0,2)$的动直线与C交于两点P，Q，若曲线C上存在某定点A使得$k_{PA}+k_{QA}$为定值λ，则λ^2的值为________.

方法提供与解析：

解析：斜率定值问题

设$A(m,n)$，$l_{PQ}:y=kx+2$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则$m^2-n^2=1$，

联立$\begin{cases}y=kx+2\\x^2-y^2=1\end{cases}$，$(1-k^2)x^2-4kx-5=0$，由韦达定理，有：$x_1+x_2=\dfrac{4k}{1-k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{-5}{1-k^2}$，

$\therefore k_{PA}+k_{QA}=\dfrac{y_1-n}{x_1-m}+\dfrac{y_1-n}{x_1-m}=\dfrac{2kx_1x_2+(2-n-mk)(x_1+x_2)-2m(2-n)}{x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2}$

$=\dfrac{(-2mn)k^2+(-2-4n)k-2m(2-n)}{-m^2k^2-4mk+m^2-5}(\Delta)$

要使得(Δ)为常数，则$\dfrac{-2mn}{-m^2}=\dfrac{-2-4n}{-4m}=\dfrac{-2m(2-n)}{m^2-5}$，

可得$m=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$n=\dfrac{1}{2}$，$\lambda=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$或$m=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$n=\dfrac{1}{2}$，$\lambda=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

故$\lambda^2=\dfrac{4}{5}$.

17：（2022年11月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第17题）

17：已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,\left\{\dfrac{a_n}{3^{n-1}}\right\}$成公差为1的等差数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{a_n\}$的前n项和.

方法提供与解析：

（1）解析：（等差定义）

易知$b_n=\dfrac{a_n}{3^{n-1}}$成等差数列，即$b_n=n$，从而$a_n=n\cdot 3^{n-1}$

（2）解析：（错位相减）

令$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则$3S_n=3+2\times 3^2+\cdots+n\times 3^n$，

可知$-2S_n=1+(3+3^2+\cdots+3^{n-1})-n\times 3^n=1+\dfrac{3(1-3^{n-1})}{1-3}-n\times 3^n$

化简得：$S_n=\dfrac{2n-1}{4}3^n+\dfrac{1}{4}$

18：（2022年11月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第18题）

18：锐角ΔABC中，已知$\dfrac{1+\sin 2B-\cos 2B}{1+\sin 2B+\cos 2B}=\sqrt{3}$.

（1）求角B；

（2）若$a=2$，求ΔABC的面积S的取值范围.

方法提供与解析：

（1）解析：（恒等变形）

易知$\dfrac{1+\sin 2B-\cos 2B}{1+\sin 2B+\cos 2B}=\dfrac{2\sin B(\cos B+\sin B)}{2\cos B(\cos B+\sin B)}=\tan B$，可知$B=\dfrac{\pi}{3}$；

（2）解析：（面积公式）

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{\sin A}\sin C\cdot\sin B=\sqrt{3}\frac{\sin C}{\sin A}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan A}\right)$$

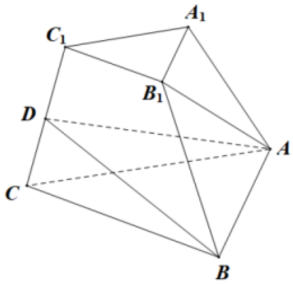
由锐角三角形可知$\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\ 0<\dfrac{2\pi}{3}-A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，可得$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，从而$S\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}\right)$

19：（2022年11月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第19题）

19：三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，ΔABC为正三角形，$BC=2$，$CC_1=\sqrt{3}$，$B_1C_1=1$，$CC_1\perp BC$

（1）求证：$BC\perp AB_1$；

（2）若二面角B_1-BC-A的平面角大小为60°，且在线段CC_1上有点D使得平面DAB平分四面体$ABCC_1$的体积，求BD与面BB_1A_1A所成角的正弦值.



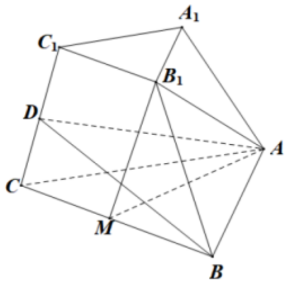
方法提供与解析：

解析1：

（1）证明：如图，取BC中点M，$\because$由ΔABC为正三角形$\therefore AM\perp BC$

$\because B_1C_1//MC$且$B_1C_1=MC$，$\therefore B_1MCC_1$为平行四边形，

$\therefore B_1M\perp BC$ $\because B_1M\cap AM=M$，$\therefore BC\perp$面AMB_1，$\therefore BC\perp AB_1$



（2）由（1）可知二面角B_1-BC-A的平面角即$\angle AMB_1=60^\circ$，作$B_1O\perp AM$，$\because BC\perp$面AMB_1，$BC\subset$面ABC，$\therefore$面$ABC\perp$面AMB_1，$\because$面$ABC\cap$面$AMB_1=AM$，$\therefore B_1O\perp$面ABC

以OB_1为原点，OB_1为z轴，OA为x轴，平行于MB为y轴，

则 $B_1\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$，$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$，$B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},1,0\right)$，$C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-1,0\right)$，$M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$

故 $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{MB_1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2}\right)$，可知 $C_1\left(0,-1,\frac{3}{2}\right)$，设面 ABB_1A_1 法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{BB_1}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x-y+\frac{3}{2}z=0\end{cases}$，取 $\vec{n}=\left(1,\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

由平面 DAB 平分四面体 $ABCC_1$ 的体积可知 D 为 CC_1 中点，

即 $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},-1,\frac{3}{4}\right)$，$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},-2,\frac{3}{4}\right)$，设 BD 与面 BB_1A_1A 所成线面角为 θ，从而

$\sin\theta=\left|\frac{\overrightarrow{BD}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{BD}||\vec{n}|}\right|=\frac{9}{247}\sqrt{247}.$

（2）解析 2：

如图，$\because$ 平面 DAB 平分四面体 $ABCC_1$ 的体积，$\therefore D$ 为 CC_1 的中点，

$\therefore BD=\sqrt{DC^2+BC^2}=\frac{\sqrt{19}}{2}$，设 BC_1 与 B_1M 交于点 N，则 N 为 B_1M 的中点，

$\because AN\perp$ 平面 BB_1C_1C，$\because AM=B_1M=\sqrt{3}$，由（1）知，$\angle AMB_1$ 为的二面角 B_1-BC-A 的平面角，

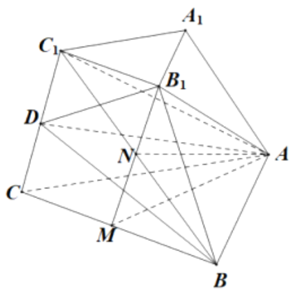
$\therefore \angle AMB_1=60$，$\therefore \Delta AMB_1$ 为正三角形，$\therefore AN=\frac{3}{2}$，

在 ΔABB_1 中，$BB_1=AB=2$，$AB_1=\sqrt{3}$ $\therefore S_{\Delta ABB_1}=\frac{\sqrt{39}}{4}$，$S_{\Delta DBB_1}=S_{BB_1CC_1}-S_{\Delta C_1DB_1}-S_{\Delta DBC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

设点 D 到平面 ABB_1 的距离为 h，

由 $V_{D-ABB_1}=V_{A-DB_1}$ 得：$\frac{1}{3}\times h\times\frac{\sqrt{39}}{4}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$\therefore h=\frac{9\sqrt{13}}{26}$

设 BD 与平面 BB_1A_1A 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{h}{BD}=\frac{9\sqrt{247}}{247}$



20：（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 20 题）

20： 某大学有 A,B 两个餐厅为学生提供午餐与晚餐服务，甲、乙两位学生每天午餐和晚餐都在学校就餐，近 **100** 天选择餐厅就餐情况统计如下：

选择餐厅情况（午餐，晚餐）	(A,A)	(A,B)	(B,A)	(B,B)
甲	**30** 天	**20** 天	**40** 天	**10** 天
乙	**20** 天	**25** 天	**15** 天	**40** 天

假设甲、乙选择餐厅相互独立，用频率估计概率.

（**1**）分别估计一天中甲午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐的概率，乙午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐的概率；

（**2**）记 X 为甲、乙在一天中就餐餐厅的个数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（**3**）假设 M 表示事件"A 餐厅推出优惠套餐"，N 表示事件"某学生去 A 餐厅就餐"，$P(M)>0$，一般来说在推出优惠套餐的情况下学生去该餐厅就餐的概率会比不推出优惠套餐的情况下去该餐厅就餐的概率要大，证明：$P(M\mid N)>P(M\mid \bar{N})$.

方法提供与解析：

解析 **1**：

（**1**）设事件 C 为"一天中甲员工午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐"，事件 D 为"乙员工午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐"因为 **100** 个工作日中甲员工午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐的天数为 **30**，乙员工午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐的天数为 **40**，所以 $P(C)=\frac{30}{100}=0.3$，$P(D)=\frac{40}{100}=0.4$

（**2**）由题意知，甲员工午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐的概率为 0.1，

乙员工午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐的概率为 0.2，

记 X 为甲、乙两员工在一天中就餐餐厅的个数，则 X 的所有可能取值为 1、2，

所以 $P(X=1)=0.3\times0.2+0.1\times0.4=0.1$，$P(X=2)=1-P(X=1)=0.9$

所以 X 的分布列为：

X	**1**	**2**
P	0.1	0.9

（**3**）由题知 $P(N\mid M)>P(N\mid \bar{M})$，即 $\frac{P(NM)}{P(M)}>\frac{P(N\bar{M})}{P(\bar{M})}=\frac{P(N)-P(NM)}{1-P(M)}$，

即 $P(NM)>P(N)\cdot P(M)$

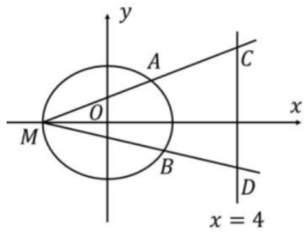
即 $P(NM)-P(N)P(NM)>P(N)\cdot P(M)-P(N)P(NM)$，

即 $P(NM)\cdot P(\bar{N})>P(N)P(\bar{N}M)$，即 $\dfrac{P(NM)}{P(N)}>\dfrac{P(\bar{N}M)}{P(\bar{N})}$，

即 $P(M\mid N)>P(M\mid \bar{N})$.

21：（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 21 题）

21. 如图，已知 M 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左顶点，过 M 作两条射线，分别交椭圆于点 A，B，交直线 $x=4$ 于点 C,D.



(I) 若 $\angle AMB=45^\circ$，求 $|CD|$ 的最小值；

(II) 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$，当 $\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{1}{y_3}+\dfrac{1}{y_4}$，求证：直线 AB 过定点.

方法提供与解析：

（1）解析：

由 $\tan 45^\circ=\dfrac{k_{AM}-k_{BM}}{1+k_{AM}k_{BM}}$，可得：$6(y_3-y_4)=36+y_3y_4$，即 $y_4=\dfrac{6y_3-36}{y_3+6}$，

即 $y_3-y_4=y_3-\dfrac{6y_3-36}{y_3+6}=y_3+6+\dfrac{72}{y_3+6}-12\geq 12(\sqrt{2}-1)$，

当且仅当 $y_3=6(\sqrt{2}-1)$ 取得.

（2）解析：

设 l_{AB}：$x=ty+m$，代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 可得：$(3t^2+4)y^2+6tmy+3m^2-12=0$，

可得 $y_1+y_2=\dfrac{-6tm}{3t^2+4}, y_1\cdot y_2=\dfrac{3m^2-12}{3t^2+4}$，

设 $l_{MC}: y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$ 可得：$y_3=\dfrac{6y_1}{x_1+2}$，同理 $y_4=\dfrac{6y_3}{x_3+2}$.

从而 $\dfrac{1}{y_3}+\dfrac{1}{y_4}=\dfrac{x_1+2}{6y_1}+\dfrac{x_2+2}{6y_2}=\dfrac{2ty_1y_2+(m+2)(y_1+y_2)}{6y_1y_2}=\dfrac{y_1+y_2}{y_1y_2}$，

即 $2ty_1y_2+(m-4)(y_1+y_2)=0$，即 $m=1$，从而直线 AB 过定点 $(1,0)$.

22：（2022 年 11 月浙江省杭州市高三一模数学试卷解析第 22 题）

22：已知函数 $f(x)=a\ln x-x^2-x$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $a=-1$，函数 $F(x)=f(x)+x+1$，且 $\forall m,n\in(0,+\infty),m\neq n,|mF(n)-nF(m)|>\lambda|m-n|$，

求λ的取值范围.

方法提供与解析：

（1）解析：易知$f'(x)=\dfrac{a}{x}-2x-1=\dfrac{-2x^2-x+a}{x}(x>0)$，

当$a\le 0$时，$f'(x)\le 0, f(x)$在$(0,+\infty)$上递减；

当$a>0$时，$-2x^2-x+a=0$有正根$x_0=\dfrac{\sqrt{1+8a}-1}{4}$，且易知当$x\in(0,x_0)$时$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$x\in(x_0,+\infty)$时 $f'(x)<0, f(x)$单调递减；

综上所述：当$a\le 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上递减；当$a>0$时，$f(x)$在$(0,x_0)$上递增，在$(x_0,+\infty)$上递减.

（2）解析：由题知：$\left|\dfrac{F(n)}{n}-\dfrac{F(m)}{m}\right|>\lambda\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}\right|$，

不妨设$m>n>0$，令$g(x)=\dfrac{F(x)}{x}=-\dfrac{\ln x}{x}-x+\dfrac{1}{x}$，则$g'(x)=\dfrac{\ln x-x^2-2}{x^2}$，

令$h(x)=\ln x-x^2-2$，则$h'(x)=\dfrac{1}{x}-2x$，易知$h(x)$在$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$上递增，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上递减，

故$h(x)_{\max}=h\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)<0$，因此$g'(x)<0$，即$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，

从而$\dfrac{F(n)}{n}-\dfrac{F(m)}{m}>\lambda\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}\right)$，即$\dfrac{F(n)}{n}-\dfrac{\lambda}{n}>\dfrac{F(m)}{m}-\dfrac{\lambda}{m}$，

令 $T(x)=g(x)-\dfrac{\lambda}{x}$，即 $T(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，$T'(x)\le 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，可知$\lambda\le x^2-\ln x+2$，由（1）可知$h(x)=\ln x-x^2-2$有$h(x)_{\max}=h\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{5}{2}$，故$\lambda\le\dfrac{5+\ln 2}{2}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。