

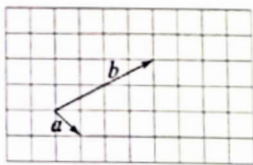
## 数 学

## 考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 复数  $z = \frac{4}{1+i}$  在复平面内对应的点在
  - A. 第一象限
  - B. 第二象限
  - C. 第三象限
  - D. 第四象限
2. 已知  $m, n$  是不重合的直线,  $\alpha, \beta$  是不重合的平面,则下列结论中正确的是
  - A. 若  $m \parallel \alpha$  且  $n \parallel \alpha$ , 则  $m \parallel n$
  - B. 若  $m \parallel \alpha$  且  $n \subset \alpha$ , 则  $m \parallel n$
  - C. 若  $m \parallel \alpha$  且  $m \parallel \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$
  - D. 若  $m \perp \alpha$  且  $m \perp \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$
3. 若一个圆锥的母线长为 2, 且其侧面积为其轴截面面积的 4 倍, 则该圆锥的高为
  - A.  $\frac{3}{\pi}$
  - B.  $\frac{\pi}{3}$
  - C.  $\frac{\pi}{2}$
  - D.  $\frac{2}{\pi}$
4. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{c-b}{2c}$ , 则  $\triangle ABC$  是
  - A. 直角三角形
  - B. 锐角三角形
  - C. 等边三角形
  - D.  $A = 30^\circ$  的三角形
5. 已知平面向量  $a, b$  在网格中的位置如图所示, 小正方形的边长均为 1, 则  $a \cdot (b - 2a) =$

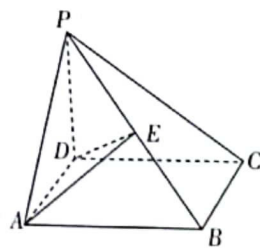


- A. -9
- B. -6
- C. -2
- D. 2

6. 欧拉公式是指以欧拉命名的诸多公式,常用的欧拉公式有  $e^{i\theta} = \cos \theta + i\sin \theta$ . 若复数  $z$  满足  $(e^{i\pi} - i) \cdot z = 1$ , 则  $|z| =$
- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       B. 1                      C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       D.  $\sqrt{2}$
7. 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA = PB = PC = 2\sqrt{3}$ ,  $AB = AC = BC = 3$ , 则三棱锥  $P-ABC$  的外接球的表面积是
- A.  $9\pi$                       B.  $16\pi$                       C.  $4\pi$                       D.  $\frac{25}{4}\pi$
8. 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ , 若  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 且  $PA = 1$ , 则点  $A$  到平面  $PBD$  的距离为
- A.  $\frac{5}{13}$                       B.  $\frac{7}{12}$                       C.  $\frac{10}{13}$                       D.  $\frac{12}{13}$

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 已知  $M$  为  $\triangle ABC$  的重心,  $D$  为边  $BC$  的中点, 则
- A.  $\vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MD}$                       B.  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$
- C.  $\vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{BD}$                       D.  $\vec{AB} + \vec{AC} = 2(\vec{MB} + \vec{MC})$
10. 已知复数  $z_1 = 1 + 2i$ ,  $z_2 = 3 + 4i$ , 则
- A.  $|z_1| = |z_2|$
- B. 复数  $z_1 z_2$  的虚部为 2
- C. 复数  $z_1 z_2$  与  $z_1$  在复平面内所对应的点位于同一象限
- D. 复数  $z_2$  在复平面内对应的点在函数  $y = 2x - 2$  的图象上
11. 已知在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 则下列结论中正确的是
- A. 若  $\sin A > \sin B$ , 则  $\cos A < \cos B$
- B. 若  $\triangle ABC$  是锐角三角形, 则不等式  $\sin A < \cos B$  恒成立
- C. 若  $a \cos B = b \cos A$ , 则  $\triangle ABC$  必是等边三角形
- D. 若  $A = \frac{\pi}{3}$ ,  $a^2 = bc$ , 则  $\triangle ABC$  是等边三角形
12. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面为正方形,  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $PD = AD = 1$ , 点  $E$  是棱  $PB$  的中点, 过  $A, D, E$  三点的平面  $\alpha$  与平面  $PBC$  的交线为  $l$ , 则
- A. 直线  $l$  与平面  $PAD$  有一个交点
- B.  $PC \perp DE$
- C. 直线  $PA$  与  $l$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D. 平面  $\alpha$  截四棱锥  $P-ABCD$  所得的上下两个几何体的体积之比为  $\frac{3}{5}$



三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知  $a \in \mathbf{R}$ , 且复数  $\frac{a-i}{1+i}$  是纯虚数, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知向量  $\mathbf{a} = (1, t)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 2t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , 且  $3\mathbf{a} - \mathbf{b}$  与  $\mathbf{b}$  垂直, 则  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角的余弦值为 \_\_\_\_\_.

15. 在古代数学中, 把正四棱台叫做方亭, 数学家刘徽用切割的方法巧妙地推导出了方亭的体积公式  $V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h$ ,  $a$  为方亭的下底面边长,  $b$  为上底面边长,  $h$  为高. 某地计划在一片平原地带挖一条笔直的沟渠, 渠的横截面为等腰梯形, 上底为10米, 下底为6米, 深2米, 长为837.5米, 并把挖出的土堆成一个方亭, 设计方亭的下底面边长为70米, 高为6米, 则其侧面与下底面所成的二面角的正切值为 \_\_\_\_\_.

16. 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $c \cos B + \frac{\sqrt{3}}{3} b \sin \angle ACB - a = 0$ , 设  $D$  为  $AB$  边的中点, 若  $BC = 2$  且  $\sqrt{3} BC = 2BD$ , 则  $CD =$  \_\_\_\_\_.

四、解答题: 共70分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10分)

已知复数  $z = a - i$  ( $a > 0$ ), 且复数  $z + \frac{2}{z}$  为实数.

(I) 求复数  $z$ ;

(II) 若复数  $(m - z)^2$  在复平面内对应的点在第二象限, 求实数  $m$  的取值范围.

18. (12分)

已知  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  是同一平面内的三个向量, 其中  $\mathbf{a} = (1, -2)$ .

(I) 若  $|\mathbf{c}| = 2\sqrt{5}$ , 且  $\mathbf{c} \parallel \mathbf{a}$ , 求  $\mathbf{c}$  的坐标;

(II) 若  $|\mathbf{b}| = 2\sqrt{5}$ , 且  $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$  与  $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$  垂直, 求  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角  $\theta$ .

19. (12分)

已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $\sqrt{3} a \sin B + b \cos A = c$ .

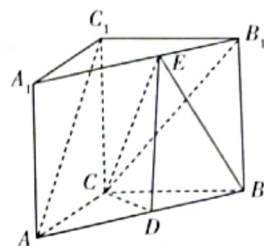
(I) 求  $B$ ;

(II) 设  $a = \sqrt{3}c, b = 2$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

20. (12分)

如图,在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AC = 6, BC = 8, AB = 10, AA_1 = 5$ , 点  $D$  为棱  $AB$  的中点, 点  $E$  为棱  $A_1B_1$  上一点.

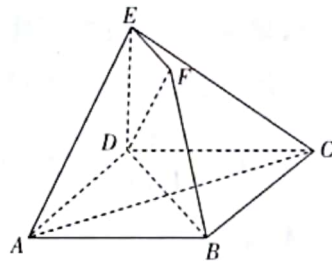
- (I) 证明:  $AC \perp B_1C$ ;  
 (II) 求三棱锥  $B - ECD$  的体积;  
 (III) 求直线  $AC_1$  与平面  $BB_1C_1C$  所成角的余弦值.



21. (12分)

如图,正方形  $ABCD$  与平面  $BDEF$  交于  $BD$ ,  $DE \perp$  平面  $ABCD$ ,  $EF \parallel$  平面  $ABCD$ , 且  $DE = EF = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$ .

- (I) 求证:  $BF \parallel$  平面  $AEC$ ;  
 (II) 求证:  $DF \perp$  平面  $AEC$ .



22. (12分)

已知在锐角  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别是内角  $A, B, C$  所对的边, 向量  $m = (b, \cos B)$ ,  $n = (\cos A, a - \sqrt{2}c)$ , 且  $m \perp n$ .

- (I) 求  $B$ ;  
 (II) 若  $b = 2$ , 求  $\triangle ABC$  的面积取值范围.