

数学试卷

命题学校：洪山高中

命题教师：付勇

审题教师：戴露

考试时间：2023 年 8 月 16 日

试卷满分：150 分

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4 = 0\}$, $B = \{x | ax - 2 = 0\}$, 若 $A \cap B = B$, 则实数 a 的所有可能取值构成的集合为

- A. $\{-1\}$ B. $\{1\}$ C. $\{-1, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

2. 已知复数 $z = \frac{4+5i}{-2+3i}$, 则 z 的共轭复数 \bar{z} 在复平面内对应的点位于

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - 2\vec{b}|$, 则向量 \vec{a} 在向量 \vec{b} 上的投影向量为

- A. $-\frac{1}{2}\vec{b}$ B. $\frac{1}{2}\vec{b}$ C. $-2\vec{b}$ D. $2\vec{b}$

4. 已知圆台上下底面半径之比为 1:2, 母线与底面所成的角的正弦值为 $\frac{3}{5}$, 圆台体积为 14π , 则该圆台的侧面面积为

- A. 30π B. 18π C. 15π D. 9π

5. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 2)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 则在椭圆 C 上存在点 P 使得 $\angle F_1PF_2 = \frac{2\pi}{3}$ 成立的一个充分不必要条件是

- A. $b \in (0, 1)$ B. $b \in (0, 1]$ C. $b \in (1, 2)$ D. $b \in [1, 2)$

6. 已知过点 P 与圆 $x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$ 相切的两条直线的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 设过点 P 与圆 $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 相切的两条直线的夹角为 α , 则 $\sin \alpha =$

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

7. 心理学家有时使用函数 $L(t) = A(1 - e^{-kt})$ 来测定在时间 t 分钟内能够记忆的量 $L(t)$, 其中 A 表示需要记忆的量, k 表示记忆率. 假设一个学生有 100 个单词需要记忆, 心理学家测定出在 5 分钟内该学生记忆 25 个单词, 则该学生记忆率 k 所在区间为

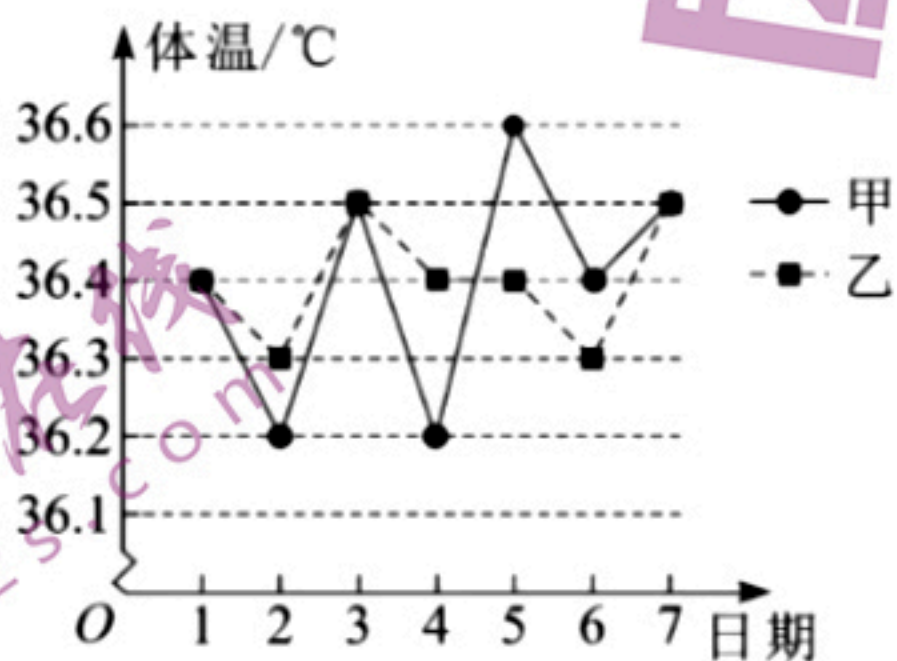
- A. $(0, \frac{1}{20})$ B. $(\frac{1}{20}, \frac{1}{15})$
 C. $(\frac{1}{15}, \frac{1}{10})$ D. $(\frac{1}{10}, \frac{1}{5})$

8. 已知 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, 且 $\sin \alpha + \sin \beta = \sqrt{3}(\cos \alpha + \cos \beta)$, 则下列结论一定不正确的是

- A. $\cos(\alpha - \beta) = -1$ B. $\sin(\alpha - \beta) = 0$
 C. $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$ D. $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 某医院护士对甲、乙两名住院病人一周内的体温进行了统计，其结果如图所示，则下列说法正确的有



A. 病人甲体温的极差为 0.3°C

B. 病人乙的体温比病人甲的体温稳定

C. 病人乙体温的众数、中位数与平均数都为 36.4°C

D. 病人甲体温的上四分位数为 36.4°C

10. 已知点 P 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 底面 $ABCD$ 的中心，用与直线 PD_1 垂直的平面 α 截此正方体，所得截面可能是

A. 三角形

B. 四边形

C. 五边形

D. 六边形

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{4}{5}\right)^n$, $b_n = a_{n+1} - a_n$, 则

A. 数列 $\{a_n\}$ 的最小项为 a_1

B. 数列 $\{a_n\}$ 的最大项为 a_5

C. 数列 $\left\{\frac{b_{n+1}}{b_n}\right\}$ 的最小值为 -0.8

D. 数列 $\left\{\frac{b_{n+1}}{b_n}\right\}$ 的最大值为 2.4

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 满足 $f(x+y)+f(x-y)=f(x) \cdot f(y)$, 且 $f(1)=-2$, 则

A. $f(0)=2$

B. $f(x)$ 为奇函数

C. $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(2023)=-2$

D. $-2 \leq f(x) \leq 2$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 若函数 $f(x) = \frac{x^3 2^x}{a^x + 1}$ 为奇函数, 则 $a =$ _____.

14. 有两个家庭共 8 人暑假到新疆结伴旅游 (每个家庭包括一对夫妻和两个孩子), 他们在乌鲁木齐租了两辆不同的汽车进行自驾游, 每辆汽车乘坐 4 人, 要求每对夫妻乘坐同一辆汽车, 且该车上至少有一个该夫妻自己的孩子, 则满足条件的不同乘车方案种数为 _____.

15. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$) 的图象关于点 $(-1, 0)$ 中心对称, 关于直线 $x = 5$ 轴对称, 且函数 $f(x)$ 在 $(1, 3)$ 上单调递减, 则 $f\left(\frac{2}{3}\right) =$ _____.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 A 为双曲线 C 右支上一点, 直线 AF_1 交双曲线的左支于点 B , 若 $|AB| = |AF_2|$, 且原点 O 到直线 AF_1 的距离为 1, 则 C 的离心率为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_{n+1} = 2S_n + 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = 2^{n+1}$, 证明: $n > 2$ 时, $a_n - b_n > 0$.

18. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 记角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $a \cos C + \sqrt{3}a \sin C - b + 2c = 0$.

(1) 求角 A ;

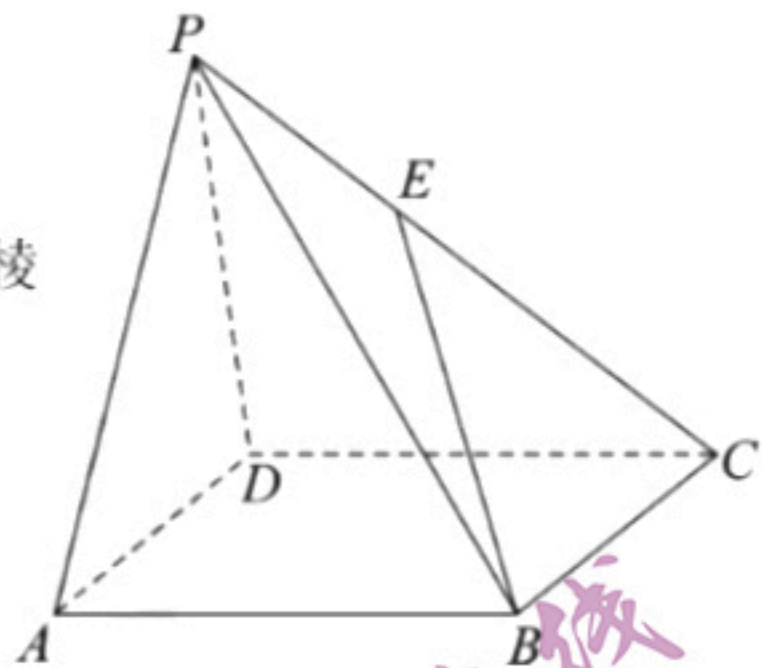
(2) 若 $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{2}{3}$, AD 为 BC 边上的中线, 求 $\tan \angle BAD$.

19. (12分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 平面 $PAD \perp$ 平面 PAB , $\angle PAD = 45^\circ$, $AB = 2$.

(1) 证明: 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 若 E 为 PC 的中点, 异面直线 BE 与 PA 所成角为 30° , 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

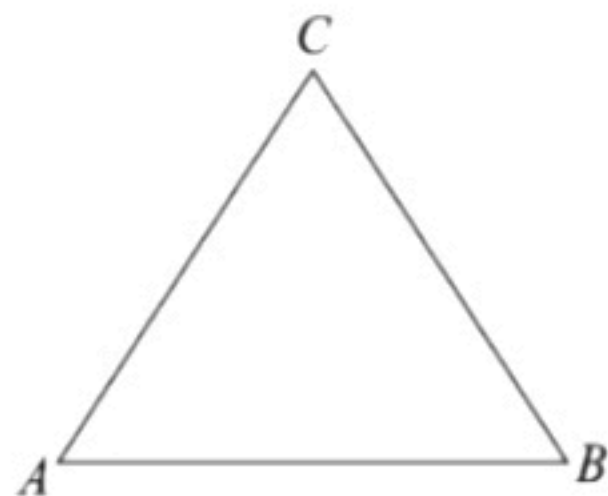


20. (12分)

如图, $\triangle ABC$ 是正三角形, 一点从 A 出发, 每次投掷一枚骰子, 若向上点数大于或等于5, 则沿 $\triangle ABC$ 的边顺时针移动到下一个顶点; 若向上的点数小于或等于4, 则沿 $\triangle ABC$ 的边逆时针移动到下一个顶点.

(1) 求投掷2次骰子后, 该点恰好回到 A 点的概率;

(2) 若投掷4次骰子, 记经过 B 点的次数为 X , 求 EX .



21. (12分)

已知函数 $f(x) = (x-4)\ln x + x^2 + ax - 2$.

- (1) 证明: $f(x)$ 有唯一的极值点;
- (2) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

22. (12分)

已知过点 $(3,0)$ 的直线交抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 于 A, B 两点, 且 $AO \perp BO$ (点 O 为坐标原点), M, N, P 是抛物线上横坐标不同的三点, 直线 MP 过定点 $C(-2,0)$, 直线 NP 过定点 $D(2,2)$.

- (1) 求该抛物线的标准方程;
- (2) 证明: 直线 MN 过定点.