2022学年第一学期浙江省名校协作体适应性试题

高三年级数学学科

考生须知：

1．本卷满分150分，考试时间120分钟；

2．答题前，在答题卷指定区域填写学校、班级、姓名、试场号、座位号及准考证号。

3．所有答案必须写在答题卷上，写在试卷上无效；

4．考试结束后，只需上交答题卷。

选择题部分

一、选择题： 本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

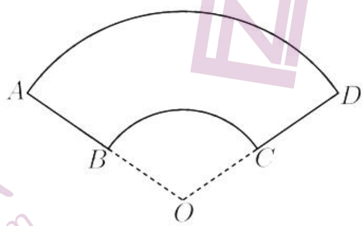
1．已知集合 $A=\{x\,||x|<2\}$，$B=\left\{x\left|\frac{1}{x}<1\right.\right\}$，$a\in A\cap B$，则 a 的值可以是（　　）

A．3　　B．-3　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$-\frac{1}{3}$

2．已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=2\sqrt{13}$ 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

3．如图是杭州2022年第19届亚运会会徽，名为"潮涌"，形象象征着新时代中国特色社会主义大潮的涌动和发展.如图是会徽的几何图形，设弧 AD 长度是 l_1，弧 BC 长度是 l_2，几何图形 $ABCD$ 面积为 S_1，扇形 BOC 面积为 S_2，若 $\frac{l_1}{l_2}=2$，则 $\frac{S_1}{S_2}=$（　　）



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4．已知复数 z 满足 $z\cdot\bar{z}+4i\bar{z}=5+ai$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$[-4,4]$　　B．$[-6,6]$　　C．$[-8,8]$　　D．$[-12,12]$

5．若 $AB=2, AC=\sqrt{2}BC$，则 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值是（　　）

A．$\sqrt{6}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．3　　D．$2\sqrt{3}$

6．用 1，2，3，4，5，6 组成六位数（没有重复数字），在任意相邻两个数字的奇偶性不同的条件下，1 和 2 相邻的概率是（　　）

A．$\frac{5}{18}$　　B．$\frac{4}{9}$　　C．$\frac{5}{9}$　　D．$\frac{13}{18}$

7．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，经过$F_1$的直线交椭圆于 A，$B$，$\triangle ABF_2$的内切圆的圆心为$I$，若$3\vec{IB}+4\vec{IA}+5\vec{IF_2}=\vec{0}$，则该椭圆的离心率是（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D．$\frac{1}{2}$

8．已知数列$\{a_n\}$满足递推关系$e^{a_n}-1=a_ne^{a_{n+1}}$，且$a_1>0$，若存在等比数列$\{b_n\}$满足$b_{n+1}\le a_n\le b_n$，则$\{b_n\}$公比q为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{e}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{\pi}$

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合 题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的或不选的得 0 分。

9．同时抛掷两个质地均匀的四面分别标有 1，2，3，4 的正四面体一次，记事件A表示"第一个四面体向下的一面出现偶数"，事件B表示"第二个四面体向下的一面出现奇数"，事件C表示"两个四面体向下的一面同时出现奇数或者同时出现偶数"，则（　　）

A．$P(AB)=P(AC)=P(BC)$　　B．$P(A|B)=P(A|C)=\frac{1}{2}$

C．$P(ABC)=\frac{1}{8}$　　D．$P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{4}$

10．定义在$(0,\frac{\pi}{2})$上的函数$f(x)$，$f'(x)$是它的导函数，且恒有$f(x)>f'(x)\tan x$成立，则下列正确的是（　　）

A．$\sqrt{3}f(\frac{\pi}{4})>\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})$　　B．$f(1)>2f(\frac{\pi}{6})\sin 1$

C．$\sqrt{2}f(\frac{\pi}{6})>f(\frac{\pi}{4})$　　D．$\sqrt{3}f(\frac{\pi}{6})>f(\frac{\pi}{3})$

11．已知抛物线$y^2=2px$上的四点$A(2,2)$，B，C，P，直线AB，AC是圆$M:(x-2)^2+y^2=1$的两条切线，直线PQ、PR与圆M分别切于点Q、R，则下列说法正确的有（　　）

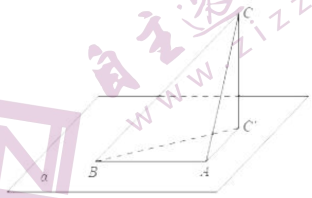
A．当劣弧QR的弧长最短时，$\cos\angle QPR=-\frac{1}{3}$

B．当劣弧QR的弧长最短时，$\cos\angle QPR=\frac{1}{3}$

C. 直线BC的方程为$x+2y+1=0$

D. 直线BC的方程为$3x+6y+4=0$

12. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=\theta$，$AB\subset\alpha$，设点C在α上的射影为C'，将$\triangle ABC$绕边AB任意转动，则有（　　）



A. 若θ为锐角，则在转动过程中存在位置使$\angle BC'A=2\angle BCA$

B. 若θ为直角，则在转动过程中存在位置使$\angle BC'A=\frac{1}{2}\angle BCA$

C. 若$\theta=105^\circ$，则在转动过程中存在位置使$\angle BC'A>\angle BCA$

D. 若$\theta=120^\circ$，则在转动过程中存在位置使$\angle BC'A>\angle BCA$

非选择题部分

三、填空题： 本大题共4小题，每小题5分，共20分。把答案填在答题卡中的横线上。

13. $\left(x-\frac{2}{x}\right)^8$的展开式中的常数项为_______.

14. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，右顶点为A，以坐标原点$O$为圆心，过点A的圆与双曲线$C$的一条渐近线交于位于第一象限的点$P$，若直线$PF$的斜率为$-3$，则双曲线$C$的渐近线方程为________.

15. 以ABC为底的两个正三棱锥$P-ABC$和$Q-ABC$内接于同一个球，并且正三棱锥$P-ABC$的侧面与底面ABC所成的角为45°，记正三棱锥$P-ABC$和正三棱锥$Q-ABC$的体积分别为V_1和V_2，则$\frac{V_1}{V_2}=$__________

16. 设函数$f(x)$是定义在实数集R上的偶函数，且$f(x)=f(2-x)$，当$x\in[0,1]$时，$f(x)=x^3$，则函数$g(x)=|\cos\pi x|-f(x)$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$上所有零点之和为__________.

四、解答题： 本大题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本题满分10分）已知函数$f(x)=\cos^2x+\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x-\frac{1}{2}$.

（1）求函数$f(x)$的单调递增区间；

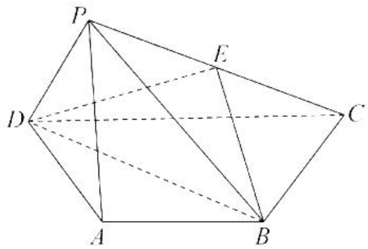
（2）求$f(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最值.

18.（本题满分 12 分）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_{n+1}=\frac{3-(-1)^n}{2}a_n+\frac{1+(-1)^n}{2}$.

（1）设$b_n=a_{2n-1}$，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{a_n\}$的前$2n$项和S_{2n}.

19.（本题满分 12 分）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是等腰梯形，$CD=2AB=2BC=2AD=4$，平面$ADP\perp$平面$ABCD$，E是PC的中点，且$\triangle ADP$为等边三角形，平面$ADP\cap$平面$PBC=m$.



（1）设$m\cap$直线$BC=M$，求点M到平面PDC的距离；

（2）求二面角$P-BE-D$的正弦值.

20.（本题满分 12 分）为应对气候变化，我国计划在 2030 年前实现碳排放量到达峰值，2060 年前实现"碳中和".某市为了解本市企业碳排放情况，从本市 320 家年碳排放量超过 2 万吨的企业中随机抽取 50 家企业进行了调查，得到如下频数分布表，并将年碳排放量大于 18 万吨的企业确定为"超标"企业：

硫排放量X	[2.55.5)	[5.5，8.5)	[8.5，115)	[115，14.5)	[14.5.175)	[175，20.5)	[20.5，23.5)
频数	5	6	9	12	8	6	4

（1）假设该市这 320 家企业的年碳排放量大致服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ近似为样本平均值$\bar{x}$，σ^2近似为样本方差s^2，经计算得$\bar{x}\approx 12.8$，$s\approx 5.2$.试估计这 320 家企业中"超标"企业的家数；

（2）通过研究样本原始数据发现，抽取的 50 家企业中共有 8 家"超标"企业，市政府决定对这 8 家"超标"企业进行跟踪调查，现计划在这 8 家"超标"企业中任取 5 家先进行跟踪调查，设Y为抽到的年碳排放量至少为 20.5 万吨的企业家数，求Y的分布列与数学期望.

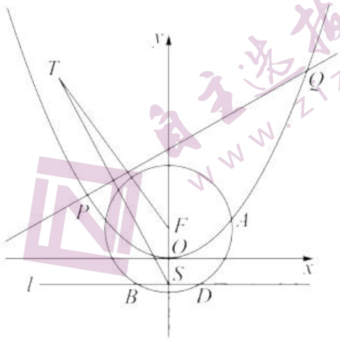
（参考数据：若$X\sim X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)=0.6827$，

$P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)=0.9545$，$P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)=0.9973$.）

21.（本题满分 12 分）抛物线$C:x^2=2py(p>0)$的焦点为F，准线为l.A为C上的一点，已知以F为圆心，FA为半径的圆F交l于B,D两点，

（1）若$\angle BFD=90^\circ$,$\triangle ABD$的面积为$4\sqrt{2}$，求p的值及圆F的方程；

（2）若直线$y=kx+b$与抛物线C交于P，Q两点，且$OP\perp OQ$，准线l与y轴交于点S，点S关于直线PQ的对称点为T，求$|FT|$的取值范围.



22.（本题满分 12 分）已知函数$f(x)=e^x-a\ln x$.

（1）当$a=1$时，证明$f(x)>2$；

（2）若$f(x)$存在极值点x_0，且对任意满足$f(x_1)=f(x_2)$的x_1,x_2，都有$x_1+x_2>2x_0$，求a的取值范围.

2022 学年第一学期浙江省名校协作体适应性试题

高三年级数学学科答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	C	D	B	C	A	A

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合 题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的或不选的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	AB	ACD	BD	AC

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。把答案填在答题卡中的横线上。

13．1120　　14．$y=\pm\frac{1}{3}x$　　15．$\frac{1}{4}$　　16．7

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本题满分 10 分）

（1）$f(x)=\dfrac{1+\cos 2x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

因为 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$），

令 $2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$），得 $x\in\left[k\pi-\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$），

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）.

（2）因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right]$.

当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 最大值为 1，当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{6}$，即 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 最小值为 $-\dfrac{1}{2}$.

18.（本题满分 12 分）

（1）由已知有：$a_{n+1}=\dfrac{3-(-1)^n}{2}a_n+\dfrac{1+(-1)^n}{2}=\begin{cases}2a_n, & n=2k+1,k\in Z\\ a_n+1, & n=2k,k\in Z\end{cases}$

所以 $b_n+1=a_{2n-1}+1$，

$b_{n+1}+1=a_{2n+1}+1=2a_{2n}+2=2a_{(2n-1)+1}+2=2a_{2n-1}+2=2(a_{2n-1}+1)=2(b_n+1)$，

其中$b_1+1=a_1+1=2$，所以数列$\{b_n+1\}$为以2为首项，公比为2的等比数列.

所以$b_n+1=2\times 2^{n-1}=2^n$，得$b_n=2^n-1$.

（2）由（1）知：$b_n=a_{2n-1}=2^n-1$，

$a_{2n}=2a_{2n-1}=2(2^n-1)$，

所以

$S_{2n}=(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^n-1)+2[(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^n-1)]$

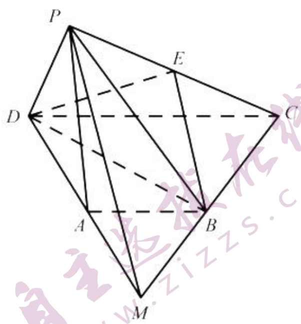
$=3[(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^n-1)]$

$=3(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n)-3n$

$=3\times\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-3n$

$=3\cdot 2^{n+1}-3n-6$.

19.（本题满分12分）



（1）延长DA,CB，交于点$M,m=$直线PM，

在底面$ABCD$中，$AB//\frac{1}{2}CD,AB=\frac{1}{2}CD$，得$AB$为$\triangle MCD$中位线，

所以B为CM中点，

因为B,E分别为CM,CP中点，所以BE为$\triangle PCM$的中位线，

得$PM//BE$，所以点M到平面PDC的距离是点B到平面PDC的距离的2倍，

易得$\triangle MCD$是等边三角形，$\angle CDM=60°$，

取AD中点O,CD中点为Q，连接OQ，

所以在$\triangle DQO$中，$\cos\angle CDM=\dfrac{DQ^2+DO^2-OQ^2}{2DQ\cdot DO}$，解得$OQ=\sqrt{3}$，

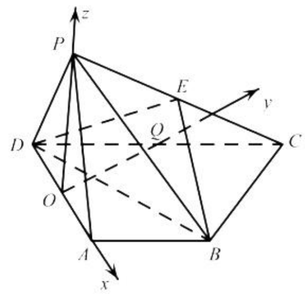
所以$DQ^2=DO^2+OQ^2$，所以$OQ\perp AD$

因为平面$ADP\perp$平面$ABCD$,平面$ADP\cap$平面$ABCD=AD$，

$OP\perp AD$，$OP\subset$平面ADP，所以$OP\perp$平面$ABCD$，则以O为原点

如图建立直角坐标系，

由题意得



$B\left(2,\sqrt{3},0\right),P\left(0,0,\sqrt{3}\right),D\left(-1,0,0\right),C\left(1,2\sqrt{3},0\right),E\left(\frac{1}{2},\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{PD}=\left(-1,0,-\sqrt{3}\right),\overrightarrow{PC}=\left(1,2\sqrt{3},-\sqrt{3}\right),\ \overrightarrow{EB}=\left(\frac{3}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

设平面 PDC 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PD}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x_1-\sqrt{3}z_1=0\\ x_1+2\sqrt{3}y_1-\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=\sqrt{3}$，则 $y_1=-1,z_1=-1$，

所以 $\overrightarrow{n_1}=\left(\sqrt{3},-1,-1\right)$.

所以点 B 到平面 PDC 的距离为 $\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{EB}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$，

所以点 M 到平面 PDC 的距离是 $\frac{4\sqrt{15}}{5}$；

（2）由（1）得：$\overrightarrow{BP}=\left(-2,-\sqrt{3},\sqrt{3}\right),\overrightarrow{BD}=\left(-3,-\sqrt{3},0\right),\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

设平面 BDE 法向量 $\overrightarrow{n_2}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-3x_2-\sqrt{3}y_2=0\\ -\frac{3}{2}x_2+\frac{\sqrt{3}}{2}z_2=0\end{cases}$，令 $x_2=1$，则 $y_2=-\sqrt{3},z_2=\sqrt{3}$，

则 $\overrightarrow{n_2}=\left(1,-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$

设平面 PBE 法向量 $\overrightarrow{n_3}=\left(x_3,y_3,z_3\right)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{BP}=0\\ \overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2x_3-\sqrt{3}y_3+\sqrt{3}z_3=0\\ -\frac{3}{2}x_3+\frac{\sqrt{3}}{2}z_3=0\end{cases}$，令 $x_3=3$，则 $y_3=\sqrt{3},z_3=3\sqrt{3}$，

则 $\overrightarrow{n_3}=\left(3,\sqrt{3},3\sqrt{3}\right)$

设二面角 P-BE-D 的平面角为 $\theta,\left|\cos\theta\right|=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_3}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_3}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{9\sqrt{273}}{273}$

因此 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{8\sqrt{91}}{91}$，二面角 $P-BE-D$ 的正弦值是 $\frac{8\sqrt{91}}{91}$

20.（本题满分 12 分）

（1）由已知，得 $\mu \approx 12.8$，$\sigma \approx 5.2$，

所以 $P(X>18)=P(X>\mu+\sigma)=\dfrac{1-0.6827}{2}=0.15865$

因为 $320\times 0.15865=50.768\approx 51$

所以这 320 家企业中"超标"企业的家数约为 51.

（2）由频数分布表可知，8 家"超标"企业中碳排放量至少为 20.5 万吨的企业有 4 家，所以

Y 的可能取值为 1，2，3，4，且 $P(Y=1)=\dfrac{C_4^1C_4^4}{C_8^5}=\dfrac{1}{14}$，$P(Y=2)=\dfrac{C_4^2C_4^3}{C_8^5}=\dfrac{3}{7}$，

$P(Y=3)=\dfrac{C_4^3C_4^2}{C_8^5}=\dfrac{3}{7}$，$P(Y=4)=\dfrac{C_4^4C_4^1}{C_8^5}=\dfrac{1}{14}$

所以 Y 的分布列为

Y	1	2	3	4
P	$\dfrac{1}{14}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{14}$

所以 $E(Y)=1\times\dfrac{1}{14}+2\times\dfrac{3}{7}+3\times\dfrac{3}{7}+4\times\dfrac{1}{14}=\dfrac{5}{2}$

21.（本题满分 12 分）

（1）由对称性可知：$\angle BFD=90°,FS=BS=DS=p$，设 $A(x_A,y_A)$，由焦半径可得：

$y_A+\dfrac{p}{2}=FA=FD=\sqrt{2}p$，$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}\cdot BD\cdot\left(y_A+\dfrac{p}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\times 2p\times\sqrt{2}p=4\sqrt{2}$，解得：$p=2$ 圆 F

的方程为：$x^2+(y-1)^2=8$

（2）由题意得：直线 PQ 的斜率一定存在，其中 $S\left(0,-\dfrac{p}{2}\right)$，设 $S\left(0,-\dfrac{p}{2}\right)$ 关于直线 PQ 的对

称点为 $T(m,n)$，则 $\begin{cases}\dfrac{n+\frac{p}{2}}{m}=-\dfrac{1}{k}\\ \dfrac{n-\frac{p}{2}}{2}=k\cdot\dfrac{m}{2}+b\end{cases}$，解得：$\begin{cases}m=-\dfrac{b+p}{k+\frac{1}{k}}\\ n=\dfrac{b+p}{k^2+1}-\dfrac{p}{2}\end{cases}$，联立 $y=kx+b$ 与 $x^2=2py$ 得：

$x^2-2pkx-2pb=0$，设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=2pk,x_1x_2=-2pb$，则

$y_1y_2=(kx_1+b)(kx_2+b)=k^2x_1x_2+kb(x_1+x_2)+b^2$，则

$x_1x_2+y_1y_2=\left(1+k^2\right)x_1x_2+kb\left(x_1+x_2\right)+b^2-2pb\left(1+k^2\right)+2pk^2b+b^2=-2pb+b^2=0$，解得：

$b=0$（此时 O 与 P 或 Q 重合，舍去）或 $b=2p$，所以

$$|FT|=\sqrt{\left(-\frac{b+p}{k+\frac{1}{k}}\right)^2+\left(\frac{b+p}{k^2+1}-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}\right)^2}=p\sqrt{\frac{k^2+4}{k^2+1}}=p\sqrt{1+\frac{3}{k^2+1}}\in(p,2p]$$

22.（本题满分 12 分）

（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-\ln x$，定义域为 $(0,+\infty)$，设 $t(x)=e^x-x-1$，则 $t'(x)=e^x-1$，所以函数 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，所以 $t(x)\geq t(0)=0$，所以 $e^x\geq x+1$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，所以 $e^{x-1}\geq x$，$x-1\geq \ln x$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，所以 $e^x\geq x+1\geq \ln x+2$，且等号不同时成立，所以 $f(x)=e^x-\ln x>2$；

（2）函数 $f(x)=e^x-a\ln x$，$f'(x)=e^x-\frac{a}{x}=\frac{xe^x-a}{x},x>0$，若 $f(x)$ 存在极值点 x_0，则

$f'(x_0)=\frac{x_0e^{x_0}-a}{x_0}=0$，所以 $a=x_0e^{x_0}>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，由 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，不妨设 $0<x_1<x_0<x_2$，若 $x_2\geq 2x_0$，则 $x_1+x_2>2x_0$；若 $x_0<x_2<2x_0$，由 $x_1+x_2>2x_0$ 可得 $x_1>2x_0-x_2$，则 $f\left(x_1\right)<f\left(2x_0-x_2\right)$，所以 $f\left(x_2\right)<f\left(2x_0-x_2\right)$，即 $f\left(x_2\right)-f\left(2x_0-x_2\right)<0$ 对 $x_0<x_2<2x_0$ 恒成立，令 $x=x_2-x_0,0<x<x_0$，则 $x_2=x+x_0$，则

$f\left(x_2\right)-f\left(2x_0-x_2\right)=e^{x_2}-a\ln x_2-e^{2x_0-x_2}+a\ln\left(2x_0-x_2\right)$

$=e^{x+x_0}-a\ln\left(x+x_0\right)-e^{x_0-x}+a\ln\left(x_0-x\right)=e^{x+x_0}-x_0e^{x_0}\ln\left(x+x_0\right)-e^{x_0-x}+x_0e^{x_0}\ln\left(x_0-x\right)$

$=e^{x_0}\left[e^x-x_0\ln\left(x+x_0\right)-e^{-x}+x_0\ln\left(x_0-x\right)\right]$，设

$g\left(x\right)=e^x-x_0\ln\left(x+x_0\right)-e^{-x}+x_0\ln\left(x_0-x\right),0<x<x_0$，则 $g\left(0\right)=0$，

$g'\left(x\right)=e^x-\frac{x_0}{x+x_0}+e^{-x}-\frac{x_0}{x_0-x}=\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)\left(x^2-x_0^2\right)+2x_0^2}{x^2-x_0^2}=\frac{\left(e^{2x}+1\right)\left(x^2-x_0^2\right)+2e^xx_0^2}{\left(x^2-x_0^2\right)e^x}$，令

$h\left(x\right)=\left(e^{2x}+1\right)\left(x^2-x_0^2\right)+2e^xx_0^2$，$h\left(0\right)=\left(e^{2x}+1\right)\left(x^2-x_0^2\right)+2e^xx_0^2=0$，则

$h'(x)=2e^{2x}\left(x^2-x_0^2\right)+2x\left(e^{2x}+1\right)+2e^xx_0^2=e^{2x}\left(2x^2-2x_0^2+2x\right)+2x+2e^xx_0^2$，$h'(0)=0$，令

$p(x)=h'(x)=e^{2x}\left(2x^2-2x_0^2+2x\right)+2x+2e^xx_0^2$，则 $p'(x)=e^{2x}\left(4x^2+8x-4x_0^2+2\right)+2+2e^xx_0^2$，

令 $p'(0)=-4x_0^2+2+2+2x_0^2=-2x_0^2+4\geq 0$，则 $x_0\in\left(0,\sqrt{2}\right]$，当 $x_0\in\left(0,\sqrt{2}\right]$时，令

$s(x)=p'(x)=e^{2x}\left(4x^2+8x-4x_0^2+2\right)+2+2e^xx_0^2$，则

$s'(x)=e^{2x}\left(8x^2+24x-8x_0^2+12\right)+2e^xx_0^2=e^x\left[e^x\left(8x^2+24x+12\right)-\left(8e^x-2\right)x_0^2\right]$

$\geq e^x\left[e^x\left(8x^2+24x+12\right)-2\left(8e^x-2\right)\right]=e^x\left[e^x\left(8x^2+24x-4\right)+4\right]$，设

$m(x)=e^x\left(8x^2+24x-4\right)+4, 0<x<x_0\leq\sqrt{2}$，所以 $m'(x)=e^x\left(8x^2+40x+20\right)>0$，所以

$m(x)>m(0)=0$，所以当 $x_0\in\left(0,\sqrt{2}\right]$时，$s'(x)>0$，$p'(x)$单调递增，$p'(x)>0$，$h'(x)$单调递增，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，$h(x)>0, g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，$g(x)<0$，

$f(x_2)-f(2x_0-x_2)<0$，符合题意；当 $x_0>\sqrt{2}$时，$p'(0)<0$，存在 $x\in(0,x_3)$，$p'(x)<0$，$h'(x)$单调递减，$h'(x)<0$，$h(x)<0$，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，$g(x)>0$，

$f(x_2)-f(2x_0-x_2)>0$，不符合题意；所以 $x_0\in\left(0,\sqrt{2}\right]$，由 $a=x_0e^{x_0}$单调递增可得

$a\in\left(0,\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\right]$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。