广西2023年4月高中毕业班模拟测试
数学（文）科参考答案

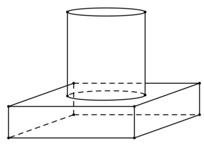
1．C.【详解】由题意可得：$A\cap B=\{0\}$.故选：C.

2．D【详解】因为复数$z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}+2$，则复数$z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$的虚部为$-1$.故选：D.

3．B【详解】从统计图可看出从2010年到2021年，创新产业指数一直处于增长的趋势，A正确；从统计图估计得到2021年的创新产业指数大约为350，而2010年—2012年这3年的创新产业指数总和大约为$150\times3=450$，故2021年的创新产业指数没有超过2010年—2012年这3年的创新产业指数总和，B错误；

因为2021年的创新产业指数大约为350，2010年的创业指数小于150，$350>150\times2$，故2021年的创新产业指数比2010年的创新产业指数的两倍还要大，C正确；

2010年到2014年的创新产业指数的折线倾斜程度小，而2017年到2021年的创业指数的折线倾斜程度大，故2010年到2014年的创新产业指数的增长速率比2017年到2021年的增长速率要慢，D正确.故选：B



4.A【详解】由三视图知该几何体是由一个圆柱和一个长方体组成的.

$\therefore$这个几何体的表面积$S=2\times(1\times4+1\times3+4\times3)+2\pi\times2=38+4\pi$．故选：A.

5.D【详解】$a_1=\dfrac{1}{2}$，则$a_2=\dfrac{1}{1-a_1}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$，$a_3=\dfrac{1}{1-a_2}=\dfrac{1}{1-2}=-1$，$a_4=\dfrac{1}{1-a_3}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$，……，

故$\{a_n\}$为周期为3的数列，因为$2021=673\times3+2$，所以$a_{2021}=a_2=2$.故选：D

6．A【详解】设圆方程为$(x-1)^2+y^2=r^2$，$\because$直线$y=2$与圆相切，圆心$(1,0)$到直线$y=2$的距离为$d=|2-0|=2$，$\therefore r=d=2$，$\therefore$圆的方程为：$(x-1)^2+y^2=4$.故选：A.

7.C【详解】$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\therefore\lambda=1$，$\mu=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\lambda+\mu=\dfrac{3}{2}$，故选：C.

8.D【详解】$\because\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$,$\therefore\sin\alpha>0,\cos\alpha<0,$且$|\sin\alpha|<|\cos\alpha|$,所以$\sin\alpha+\cos\alpha<0,\sin\alpha-\cos\alpha>0$,

所以$\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}+\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}+\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha-\cos\alpha|+|\sin\alpha+\cos\alpha|$

$=\sin\alpha-\cos\alpha-\sin\alpha-\cos\alpha=-2\cos\alpha$ 故选：D

9.C【详解】设底面半径为r，底面圆周长$2\pi r$，斗笠母线长$l=2\sqrt{2}$，侧面展开图一个半圆，则此半

圆的弧长$\frac{1}{2}\times 2\pi\cdot l=l\cdot\pi$， 所以$l\cdot\pi=2\pi r\Rightarrow r=\frac{l}{2}=\sqrt{2}$，故选：C.

10．A【详解】因为$y=\ln x$单调递增，$\ln(x-1)>\ln(3-x)$，所以$\begin{cases}x-1>3-x\\x-1>0\\3-x>0\end{cases}$，解得$2<x<3$，由几何概型的定义可得在区间$(0,3)$内随机取一个数，使得$\ln(x-1)>\ln(3-x)$的概率为$\frac{3-2}{3-0}=\frac{1}{3}$，选：A

11．B【详解】函数的导数 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，$x>0$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=e$，则当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$为增函数，当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$为减函数，则当 $x=e$ 时，函数取得极大值，极大值为 $f(e)=\frac{1}{e}$，故 A 正确，由 $f(x)=0$，得 $\ln x=0$，得 $x=1$，即函数 $f(x)$只有一个零点，故 B 错误，因为 $f(4)=\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}=f(2)$，$f(3)>f(\pi)>f(4)$，故 $f(2)<f(\pi)<f(3)$成立，故 C 正确，若 $f(x)<k-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立，则 $k>\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}$，设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}$，$x>0$，则 $h'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$，当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，即当 $x=1$ 时，函数 $h(x)$取得极大值同时也是最大值 $h(1)=1$，

∴$k>1$，故 D 正确．故选：B.

12.A【详解】由题意可知，直线AB的斜率必然存在，设直线AB的方程为$y=kx+m$，

则直线AB与y轴的交点的纵坐标为m，设点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，将直线AB的方程与椭圆方程联立并化简得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，$\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-2)>0$，

化简得$m^2<2k^2+1$，即$k^2>\frac{m^2-1}{2}$.由韦达定理可得$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}=-1$，所以$4km=2k^2+1$，将等式两边平方得$16k^2m^2=(2k^2+1)^2$，所以$m^2=\frac{(2k^2+1)^2}{16k^2}=\frac{k^2}{4}+\frac{1}{16k^2}+\frac{1}{4}\geq 2\sqrt{\frac{k^2}{4}\cdot\frac{1}{16k^2}}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

当且仅当$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$时，等号成立，由于$m^2\geq\frac{1}{2}$，解得$m\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$或$m\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因此，直线AB与y轴的交点的纵坐标的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

二．填空题

13．2.2【详解】将$\overline{x}=\frac{0+1+3+4}{4}=2,\overline{y}=\frac{a+4.3+4.8+6.7}{4}=\frac{a+15.8}{4}$代入回归方程为$\hat{y}=0.95x+2.6$，可得$\frac{a+15.8}{4}=4.5\Rightarrow a=2.2$，应填答案$2.2$.

14．$\sqrt{5}$【详解】由双曲线的方程可得$a=1$，且渐近线的方程为：$y=\pm bx$，

与 $x=1$ 联立可得 $y=\pm b$，所以 $|AB|=|2b|$，由题意可得 $4=2|b|$，解得 $|\boldsymbol{b}|=2$，又 $c^2=a^2+b^2$，

所以双曲线的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{1+4}{1}}=\sqrt{5}$

15. $\dfrac{2019}{2}$ 【详解】因为 $a_{n+1}=3a_n+2$ 所以 $a_{n+1}+1=3a_n+2+1=3(a_n+1)$ 所以 $\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=3$ 且 $a_1=2$

所以数列 $\{a_n+1\}$ 是以 3 为首项，公比为 3 的等比数列所以 $a_n+1=3^n$ 即 $a_n=3^n-1$

代入 $b_n=\log_3(a_n+1)$ 得 $b_n=\log_3 3^n=n$ 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n

则 $S_{2018}=1+2+3+\cdots 2017+2018=\dfrac{2018(1+2018)}{2}$

则 $\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_{2018}}{2018}=\dfrac{2018(1+2018)}{2\times 2018}=\dfrac{2019}{2}$

16．16【详解】由 $f(1-x)=6-f(x+1)$ 可知，函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x)+f(x+1)=6$，

所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,3)$ 成中心对称；

而 $g(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}=\dfrac{4}{x-1}+3$，显然函数 $g(x)$ 的图象是由 $y=\dfrac{4}{x}$ 先向右平移一个单位，再向上平移三个单位得到的，而 $y=\dfrac{4}{x}$ 的图象关于原点对称，所以 $g(x)=\dfrac{4}{x-1}+3$ 的图象也关于点 $(1,3)$ 成中心对称；

所以函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的 4 个交点两两关于点 $(1,3)$ 成中心对称，

即 $(x_1+x_2+x_3+x_4)+(y_1+y_2+y_3+y_4)=2\times(2\times 1+2\times 3)=16$.故答案为：16

三．解答题

17．（1）因为 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD$，$S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot AD\sin\angle CAD$，

且 $S_{\triangle ABD}=2S_{\triangle ADC}$，$\angle BAD=\angle CAD$，所以 $AB=2AC$，在 $\triangle ABC$ 中，

由正弦定理可得 $\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1}{2}$． ....5 分

（2）因为 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ADC}=BD:DC$，所以 $BD=\sqrt{2}$． ....6 分

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB$，

$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos\angle ADC$．所以 $AB^2+2AC^2=3AD^2+BD^2+2DC^2=6$．

由（1）知 $AB=2AC$，所以 $AC=1$． ....9 分

则 $\triangle ACD$ 为等腰三角形，所以 CD 边上的高 $h=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{14}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$.　　　　　　　　　　　　　　..........12 分

18.（1）先分析该窑炉烧制出的产品 T 的综合指标值的平均数：

由频率分布直方图知，综合指标值的平均数

$\bar{x}=(1\times0.01+3\times0.04+5\times0.11+7\times0.16+9\times0.18)\times2=6.84$　　　　　　　　　　　　　　........4 分

（2）由频率分布直方图可知，该新型窑炉烧制的产品 T 为一、二、三等品的概率估计值分别为 0.36，0.54，0.1，故 2000 件产品中，一、二、三等品的件数估计值分别为 720，1080，200. ....7 分

一等品的销售总利润为$720\times\frac{8}{9}\times(20-10)=6400$元；..............................8 分

二等品的销售总利润为$1080\times\frac{2}{3}\times(16-10)-1080\times\frac{1}{3}\times(10-16\times50\%)=3600$元；...........................9 分

三等品的销售总利润为$200\times\frac{2}{5}\times(12-10)-200\times\frac{3}{5}\times(10-12\times50\%)=-320$元；...............................10 分

故 2000 件产品的单件平均利润值的估计值为$(6400+3600-320)\div2000=4.84$，..........................11 分

能满足单件平均利润值不低于 4 元　　　　　　　　　　　　　　　　　　..........12 分

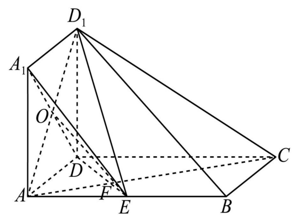
19.（1）证明：因为AA_1D_1D为正方形，$A_1D\cap AD_1=O$，所以O为AD_1的中点，

又因为OE // 平面D_1BC，平面$ABD_1\cap$平面$D_1BC=BD_1$，$OE\subset$平面ABD_1，

所以OE // BD_1，又因为O为AD_1的中点，所以E为AB的中点；.　　　　　　　　.........5 分

（2）存在，当$AE=\frac{1}{2}$时，平面$D_1DE\perp$平面AD_1C，...........6 分

理由如下：



设$AC\cap DE=F$，因为AA_1D_1D为正方形，所以$D_1D\perp AD$，

又因为$AD=$平面$AA_1D_1D\cap$平面$ABCD$，平面$AA_1D_1D\perp$平面$ABCD$，$D_1D\subset$平面AA_1D_1D，所以$D_1D\perp$平面$ABCD$，

又因为$AC\subset$平面$ABCD$，所以$D_1D\perp AC$，　　　　　　　　　　　　　　........8 分

又因为在矩形$ABCD$中，$AB=2,AD=1$，

当$AE=\frac{1}{2}$时，在Rt$\triangle ADE$中，$\tan\angle ADE=\frac{AE}{AD}=\frac{1}{2}$，在Rt$\triangle ABC$中，$\tan\angle BAC=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$，

所以$\angle ADE=\angle BAC$，又因为$\angle BAD=\angle BAC+\angle DAC=90°$，

所以$\angle ADE+\angle DAC=90°$，则$\angle AFD=90°$，所以$AC\perp DE$，　　　　　　..........10 分

又$DE,DD_1\subset$平面D_1DE，所以$AC\perp$平面D_1DE，

又因为 $AC\subset$ 平面 AD_1C，所以平面 $D_1DE\perp$ 平面 AD_1C． ....12 分

20．（1）$f'(x)=(a-x-1)e^x$，........................1 分

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,a-1)$ 上递增，在 $(a-1,+\infty)$ 上递减，..............................3 分

∴ $f(x)$ 的极大值为 $f(a-1)=e^{a-1}$，无极小值. 5..........分

（2）若对任意 $x\in[0,+\infty)$，都有 $f(x)-x\le 2$ 成立，则 $a\le\dfrac{x+2}{e^x}+x$ 对任意 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，...6

令 $g(x)=\dfrac{x+2}{e^x}+x(x\ge 0)$，则 $g'(x)=\dfrac{e^x-(x+1)}{e^x}$，.......................8 分

令 $h(x)=e^x-(x+1)$，$x\ge 0$，则 $h'(x)=e^x-1\ge h(0)=0$，

∴ $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，即 $h(x)\ge h(0)=0$，∴ $g'(x)\ge 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

∴ $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，.......................................10 分

故 $g(x)\ge g(0)=2$，故 $a\le 2$，　即 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$. ....12 分

21.（1）设动圆圆心 $M(x,y)$，∵动圆 C 经过点 $F(1,0)$，且与直线 $x=-1$ 相切，

∴点 M 的轨迹是以 $(1,0)$ 为焦点,直线 $x=-1$ 为准线的抛物线，故其方程为 $y^2=4x$，

∴动圆圆心 C 的轨迹方程是 $y^2=4x$； ....4 分

（2）由（1）可得 $P(4,4)$，当直线 PA、PB 中其中一条的斜率不存在，不妨设 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$，

易得 $A(4,-4)$，直线 PB 的直线为 $y=x$，与 $y^2=4x$ 联立可得 $B(0,0)$，

故直线 AB 的方程为 $x+y=0$； ....6 分

当直线 PA、PB 的斜率都存在时，故设直线 PA、PB 的斜率 k_1,k_2，

设 $A\left(\dfrac{y_1^2}{4},y_1\right),B\left(\dfrac{y_2^2}{4},y_2\right)$ 所以 $k_1=\dfrac{y_1-4}{\frac{1}{4}y_1^2-4}=\dfrac{4}{y_1+4}$，同理可得 $k_2=\dfrac{4}{y_2+4}$，

因为 $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=-1$，所以 $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=-1$，即 $\dfrac{k_1+k_2}{1-k_1\cdot k_2}=-1$，所以

$k_1+k_2-k_1\cdot k_2+1=0$， ....8 分

所以 $\dfrac{4}{y_1+4}+\dfrac{4}{y_2+4}-\dfrac{4}{y_1+4}\cdot\dfrac{4}{y_2+4}+1=0$，即 $8(y_1+y_2)+y_1\cdot y_2+32=0$，

由题意可设 AB 方程为 $x=ty+n$，联立 $\begin{cases}y^2=4x\\x=ty+n\end{cases}$，消 x 整理得 $y^2-4ty-4n=0$，

所以$\Delta = 16t^2 + 16n > 0$，$y_1 + y_2 = 4t$，$y_1 \cdot y_2 = -4n$，　　　　　　　　　　..........10 分

所以$32t - 4n + 32 = 0$即$n = 8t + 8$，所以$x = ty + n = ty + 8t + 8 = t(y+8) + 8$，

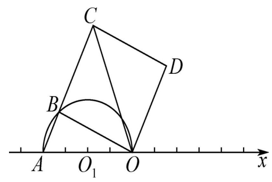
令$y + 8 = 0$得$y = -8$，$x = 8$，此时有定点$(8,-8)$，

综上所述，直线AB经过定点$(8,-8)$　　　　　　　　　　..........12 分

22.（1）连接AB,OC，因为OA是直径，所以$AB \perp BO$，在$\mathrm{Rt}\triangle AOB$中，$|OA| = 4$，$\angle AOB = \frac{\pi}{6}$，

$\therefore |OB| = 4 \times \cos\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$，$\therefore$点 B 的极坐标为$\left(2\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$，在正方形 OBCD 中，$|OC| = \sqrt{2}|OB| = 2\sqrt{6}$，

$\angle AOC = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$，$\therefore$点 C 的极坐标为$\left(2\sqrt{6}, \frac{7\pi}{12}\right)$；　　..........5 分



（2）设$D(\rho,\theta)$，$B(\rho_0,\theta_0)$，且$\begin{cases} \rho_0 = \rho \\ \theta_0 = \theta + \frac{\pi}{2} \end{cases}$①，

由题意可得O_1的直角坐标为$(-2,0)$，所以曲线 M 的普通方程为$(x+2)^2 + y^2 = 4(y \geq 0)$，即

$x^2 + 4x + y^2 = 0(y \geq 0)$，将$x = \rho_0\cos\theta_0$，$y = \rho_0\sin\theta_0$代入曲线 M 的普通方程得极坐标方程为

$\rho_0 = -4\cos\theta_0\left(\frac{\pi}{2} \leq \theta_0 \leq \pi\right)$，当$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$时，O，B 两点重合，不合题意，

$\therefore$点 B 的极坐标方程为$\rho_0 = -4\cos\theta_0\left(\frac{\pi}{2} < \theta_0 \leq \pi\right)$，

将①式代入得点 D 的极坐标方程为$\rho = -4\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 4\sin\theta\left(0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$　　..........10 分

23.（1）$M(1,2) = |x-1| + |x-2| \leq 5$，

当$x < 1$时，$1 - x + 2 - x \leq 5$，解得：$x \geq -1$，$x \geq -1$与$x < 1$取交得$-1 \leq x < 1$，

当$1 \leq x \leq 2$时，$x - 1 + 2 - x = 1 \leq 5$，故$1 \leq x \leq 2$，

当$x > 2$时，$x - 1 + x - 2 \leq 5$，解得：$x \leq 4$，$x > 2$与$x \leq 4$取交得$2 < x \leq 4$，

综上：x的取值范围是$\{x|-1 \leq x < 1\} \cup \{x|1 \leq x \leq 2\} \cup \{x|2 < x \leq 4\} = \{x|-1 \leq x \leq 4\}$　..........5 分

（2）$M(3,2) = |3x-1| + |3x-2| \geq m$对一切实数$x$恒成立，

因为$|3x-1| + |3x-2| \geq |3x-1-3x+2| = 1$，$\therefore a^2 + b^2 = 2$，　　　　　　　　..........7 分

根据柯西不等式可得$(a^2+b^2)(2^2+1^2) \geq (2a+b)^2$，

$\therefore (2a+b)^2 \leq 10$，$\therefore 0 < 2a + b \leq \sqrt{10}$，当且仅当$a = 2b$时等号成立，

$\therefore 2a + b$的最大值为$\sqrt{10}$．　　　　.........10 分