2021—2022 学年高三二轮复习验收考试
数学(理)参考答案

1.【答案】A

【解析】依题意，$\frac{i^3}{2i-1}=\frac{-i}{2i-1}=\frac{-i(2i+1)}{(2i-1)(2i+1)}=\frac{2-i}{-5}=-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$，故$\frac{i^3}{2i-1}$的虚部为$\frac{1}{5}$，故选 A.

2.【答案】C

【解析】依题意，$A=\{x|3x^2-2x-5<0\}=\{x|(3x-5)(x+1)<0\}=\{x|-1<x<\frac{5}{3}\}$，而$A\cup B=B$，故$A\subseteq B$，得$a\leqslant -1$，故选 C.

3.【答案】C

【解析】依题意，所求中位数为$80+\frac{0.5-0.4}{0.04}=82.5$，故选 C.

4.【答案】B

【解析】令$x=0$，可知$e^{2x}<e^x+1$成立，即p为真命题；若l_1与l_2相互垂直，则$2-a^2=0$，解得$a=\pm\sqrt{2}$，故q为假命题，则$p\wedge\neg q$为真命题，故选 B.

5.【答案】B

【解析】该三棱锥的四个面的面积分别为$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$，$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$，$\frac{1}{2}\times2\times2=2$，$\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{3}$，故最大值为 2，故选 B.

6.【答案】A

【解析】令$n^2\leqslant200$，因为$n\in\mathbf{N}^*$，故 200 以内的正方形数有 14 个，200 以内既是正方形数又是三角形数的仅有 1 与 36，故所求概率$P=\frac{C_{12}^1C_2^1+C_2^2}{C_{14}^2}=\frac{25}{91}$，故选 A.

7.【答案】B

【解析】由图可知，$\frac{T}{2}=1$，解得$T=2$，故$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$，则$f(x)=\cos(\pi x-\varphi)$；而$f\left(\frac{5}{6}\right)=1$，故$\frac{5\pi}{6}-\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得$\varphi=\frac{5\pi}{6}-2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又$|\varphi|<\pi$，得$\varphi=\frac{5\pi}{6}$，故选 B.

8.【答案】D

【解析】由题意可得$f(-2-x)+f(x)=2$，故图象关于$(-1,1)$中心对称，观察且结合解析式知$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，故选 D.

9.【答案】C

【解析】依题意$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\begin{cases}\tan2\beta=\frac{\sin2\beta}{\cos2\beta}=\frac{1}{2},\\ \sin^22\beta+\cos^22\beta=1,\end{cases}$解得$\sin2\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos2\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故$\cos(\alpha-2\beta)=\cos\alpha\cos2\beta+\sin\alpha\sin2\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times2=\frac{4}{5}$，而$\alpha-2\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\cos(\alpha-2\beta)=2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)-1=\frac{4}{5}$，解得 $\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，故选 C.

10.【答案】B

【解析】依题意 $\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=4\sqrt{3}$，解得 $AB=4$，延长 AC 至 M，使得 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AC}$；因为 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+(2-2x)\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AM}$，所以点 D 在直线 BM 上，取线段 AC 的中点 O，连接 OD，则 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{DO}^2-\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{DO}^2-4$，显然当 $OD\perp BM$ 时，$|\overrightarrow{DO}|$ 有最小值 3，所以 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}^2-4\geqslant 5$，故 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$ 的最小值为 5，故选 B.

11.【答案】C

【解析】取 BD 的中点 E，连接 $A'E,CE$，因为 $BD=4,BC=CD=2\sqrt{2}$，所以 $\angle BCD=90°$，所以 $\triangle BCD$ 外接圆的圆心为 E，设 $\triangle A'BD$ 外接圆的圆心为 O_1，则 $O_1E=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，过点 O_1,E 分别作平面 $A'BD$，平面 BDC 的垂线，交于点 O，则 O 即为四面体 $A'BCD$ 外接球的球心. 因为二面角 $A'-BD-C$ 的平面角为 $150°$，即 $\angle A'EC=150°$，则 $\angle OEO_1=60°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_1E$ 中，$OE=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\cos 60°}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，连接 OB，则 OB 即为外接球的半径 R，则 $R^2=OB^2=OE^2+BE^2=\frac{28}{3}$，即 $R=\frac{2\sqrt{21}}{3}$，故选 C.

12.【答案】B

【解析】设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由 $|AA_1|=3|PA_1|$ 知，点 A_1 的坐标为 $\left(\frac{-3+x_1}{4},\frac{12+y_1}{4}\right)$，又点 A_1 在抛物线上，所以 $4\cdot\frac{-3+x_1}{4}=\left(\frac{12+y_1}{4}\right)^2$，结合 $x_1=\frac{y_1^2}{4}$ 整理得 $y_1^2-8y_1-64=0$，同理，可得 $y_2^2-8y_2-64=0$，所以 y_1,y_2 是关于 y 的方程 $y^2-8y-64=0$ 的两个不相等的根，所以 $y_1+y_2=8$，$y_1y_2=-64$，设 AB 的中点为 Q，则 $y_Q=\frac{y_1+y_2}{2}=4$，$x_Q=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{y_1^2+y_2^2}{8}=\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{8}=24$，于是 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\cdot|PQ|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times25\times8\sqrt{5}=100\sqrt{5}$，故选 B.

13.【答案】-540

【解析】依题意，含 x^3 的项为 $C_6^3\cdot(3x)^3\cdot(-1)^3=-540x^3$.

14.【答案】$2x+y-1=0$

【解析】当 $x=0$ 时，$y=1$，而 $y'=3x^2-4+2e^{2x}$，故 $y'|_{x=0}=-2$，故所求切线方程为 $y-1=-2x$，即 $2x+y-1=0$.

15.【答案】2

【解析】由题意，圆心 $F'(c,0)$ 为 C 的右焦点，$|OF|=|OP|=|OF'|=c$，不妨设点 P 在第一象限，则 $\angle PFF'=\frac{\pi}{6}$，所以直线 PF 的斜率 $k=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，从而 $-\frac{b}{a}=-\sqrt{3}$，$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，故 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2$.

16.【答案】$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

【解析】由正弦定理得，$2c+a\cos C=b+\sqrt{3}a\sin C\Rightarrow 2\sin C+\sin A\cos C=\sin B+\sqrt{3}\sin A\sin C$，即 $2\sin C+\sin A\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sqrt{3}\sin A\sin C$，则 $2\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C+\cos A\cdot\sin C$，即 $\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=1$，因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$；由余弦定理可得 $b^2+c^2-bc=9$，所以 $(b+c)^2-9=3bc(*)$. $\triangle ABC$ 的周长 $l=a+b+c=3+b+c$，面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，所以 $\frac{S}{l}=\frac{\sqrt{3}bc}{4(3+b+c)}=\frac{\sqrt{3}[(b+c)^2-9]}{12(3+b+c)}=\frac{\sqrt{3}}{12}(b+c-3)$；因为 $bc\leqslant\frac{(b+c)^2}{4}$，所以由$(*)$式可得 $(b+c)^2-9\leqslant\frac{3(b+c)^2}{4}$，即 $3<b+c\leqslant 6$，当且仅当 $b=c=3$ 时等号成立，故 $\triangle ABC$ 的面积与周长之比的取值范围是 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$.

17. 解：(1) 令 $m=n=1$，得 $a_2=a_1^2$，

又 $S_2=a_1+a_2=12$，

解得 $a_1=3$(负值舍去)，$a_2=9$，(2 分)

令 $m=1$，得 $a_{n+1}=a_1a_n$，

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$，

所以 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项，3 为公比的等比数列，(5 分)

所以 $a_n=3^n$. (6 分)

(2) 由(1)可得，$b_n=\frac{n}{a_n}=\frac{n}{3^n}$，

所以 $T_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}$，

所以 $\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\cdots+\frac{n}{3^{n+1}}$，(7 分)

两式相减得，$\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}$

$=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{2n+3}{2\cdot 3^{n+1}}$，(10 分)

所以 $T_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$. (12 分)

18. (1) 证明：因为 $AB/\!/EF$，$\angle AFE=90^\circ$，所以 $FA\perp AB$；(1 分)

又平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABEF=AB$，$FA\subset$ 平面 $ABEF$，

所以 $FA\perp$ 平面 $ABCD$；(2 分)

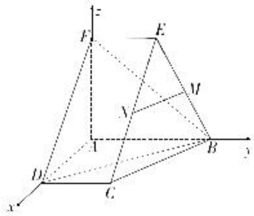
因为 $BC\subset$ 平面 $ABCD$，故 $FA\perp BC$；(3 分)

因为 M,N 分别为线段 BE,CE 的中点，故 $MN// BC$，故 $FA\perp MN$.（4 分）

（2）解：因为 $FA\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $FA\perp AD$，

又 $\angle BAD=90°$，所以 FA,AD,AB 两两互相垂直.

如图以 A 为原点，AD,AB,AF 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系.（5 分）



设 $AB=AD=AF=2$，$CD=EF=1$，

则 $D(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$F(0,0,2)$，$\overrightarrow{DF}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{FB}=(0,2,-2)$，（6 分）

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 BDF 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FB}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DF}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2y-2z=0\\ -2x+2z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=1$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$，（8 分）

易知 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$ 为平面 BEF 的一个法向量，（9 分）

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，（11 分）

即平面 BDF 与平面 BEF 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.（12 分）

19. 解：（1）若 $x=24,25,26$，则 $X=24\times50=1200$，故 $P(X=1200)=0.6$；（1 分）

若 $x=23$，则 $X=23\times50+1\times(-30)=1120$，故 $P(X=1120)=0.2$；（2 分）

若 $x=22$，则 $X=22\times50+2\times(-30)=1040$，故 $P(X=1040)=0.2$，（3 分）

故 X 的分布列为

X	1040	1120	1200
P	0.2	0.2	0.6

（4 分）

故 $E(X)=1040\times0.2+1120\times0.2+1200\times0.6=1152$.（5 分）

（2）记当天进货量为 25 箱时卖出 A 类水果所获得的利润为 Y，

若 $x=25,26$，则 $Y=25\times50=1250$，$P(Y=1250)=0.3$；（6 分）

若 $x=24$，则 $Y=24\times50+1\times(-30)=1170$，故 $P(Y=1170)=0.3$；（7 分）

若 $x=23$，则 $Y=23\times50+2\times(-30)=1090$，故 $P(X=1090)=0.2$；（8 分）

若 $x=22$，则 $Y=22\times50+3\times(-30)=1010$，故 $P(X=1010)=0.2$，（9 分）

因为 $E(Y)=1250\times0.3+1170\times0.3+1090\times0.2+1010\times0.2=1146$，（11 分）

因为 $E(X)>E(Y)$，所以应当购进 24 箱.（12 分）

20. 解：(1)依题意，$\begin{cases}|MF|=\sqrt{b^2+c^2}=a=2,\\ -\dfrac{b}{c}=\tan\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$ (1 分)

解得 $b=1$，$c=\sqrt{3}$，(3 分)

故 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. (4 分)

(2) l 经过定点 $(-1,-1)$，证明如下：

由(1)可知 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. (5 分)

①当 l 的斜率存在时，设 $l:y=kx+t(t\neq\pm1)$，

由 $\begin{cases}y=kx+t\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得 $(1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-4=0$(7 分)

则 $\Delta=(8kt)^2-4(1+4k^2)(4t^2-4)>0$，

由题知 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-8kt}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4t^2-4}{1+4k^2}$，(8 分)

则 $k_{MP}+k_{MQ}=\dfrac{y_1-1}{x_1}+\dfrac{y_2-1}{x_2}=\dfrac{2kx_1x_2+(t-1)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\dfrac{8k(t-1)}{4(t+1)(t-1)}=2$，

解得 $t=k-1$，(9 分)

所以 l 的方程为 $y=kx+k-1$，即 $y=k(x+1)-1$，

所以 l 经过定点 $(-1,-1)$. (11 分)

②当 l 的斜率不存在时，设 $l:x=m(m\neq0)$，设 $P(m,y_P)$，$Q(m,-y_P)$，

则 $k_{MP}+k_{MQ}=\dfrac{y_P-1}{m}+\dfrac{-y_P-1}{m}=2$，解得 $m=-1$，

此时 l 也经过定点 $(-1,-1)$.

综上所述，l 经过定点 $(-1,-1)$. (12 分)

21. 解：(1)依题意 $f(x)=e^x-2x$，$f'(x)=e^x-2$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln 2$；(1 分)

故当 $x\in(-\infty,\ln 2)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,\ln 2)$，单调递增区间为 $(\ln 2,+\infty)$，(3 分)

故 $f(x)$ 的极小值为 $f(\ln 2)=2-2\ln 2$，无极大值. (4 分)

(2)依题意，$e^x-ax^2-2x\geqslant1-\sin x$，即 $\sin x+e^x-ax^2-2x-1\geqslant0$，

设 $h(x)=\sin x+e^x-ax^2-2x-1(x\geqslant0)$，则 $h(x)_{\min}\geqslant0$，且 $h(0)=0$，(5 分)

则 $h'(x)=e^x-2ax-2+\cos x(x\geqslant0)$，(6 分)

且 $h'(0)=0$，$h''(x)=e^x-2a-\sin x$，$h''(0)=1-2a$，(7 分)

$\because h'''(x)=e^x-\cos x\geqslant0$，则 $h''(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，(8 分)

当 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$h''(0)=1-2a\geqslant0$，由于 $h''(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

则当 $x\geqslant0$ 时，$h''(x)\geqslant h''(0)\geqslant0$，则 $h'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $h'(x)\geqslant h'(0)=0$，则 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $h(x)\geqslant h(0)=0$，符合题意；(9 分)

当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，$h''(0)=1-2a<0$，由于 $h''(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$h''(1+2a)=e^{1+2a}-2a-\sin(1+2a)>(1+2a)-2a-1=0$，

故必然存在 $x_0\in(0,1+2a)$，使得当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h''(x)<0$，

则 $h'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，故当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<h'(0)=0$，

则 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，则当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)<h(0)=0$，不符合题意．(11 分)

综上所述，a 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$．(12 分)

22. 解：(1) 因为 l 过原点，且 α 为 l 的倾斜角，故 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$；(2 分)

因为 $\rho^2=2\rho\cos\theta+3$，由 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，

得 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x-3=0$，即 $(x-1)^2+y^2=4$．(5 分)

(2) 因为 $A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 对应的极坐标为 $\left(1,\dfrac{\pi}{3}\right)$，(6 分)

所以 l 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$，(7 分)

代入 $\rho^2=2\rho\cos\theta+3$，得 $\rho^2-\rho-3=0$，

设 $M\left(\rho_1,\dfrac{\pi}{3}\right)$，$N\left(\rho_2,\dfrac{\pi}{3}\right)$，

所以 $|OM|\cdot|ON|=|\rho_1||\rho_2|=|\rho_1\rho_2|=3$．(10 分)

23. 解：(1) 依题意，$f(x)=|x-3|+|x+5|=\begin{cases}-2x-2,x<-5,\\8,-5\leqslant x\leqslant 3,\\2x+2,x>3,\end{cases}$ (2 分)

故 $f(x)>10\Leftrightarrow\begin{cases}-2x-2>10,\\x<-5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}8>10,\\-5\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x+2>10,\\x>3,\end{cases}$ (3 分)

解得 $x<-6$ 或 $\varnothing$ 或 $x>4$，(4 分)

故不等式 $f(x)>10$ 的解集为 $\{x|x<-6$ 或 $x>4\}$．(5 分)

(2) 依题意，$f(x)=|x-3|+|x+5|\geqslant 8=m$，则 $a+b+c=2$．(6 分)

下面证明：$2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}\leqslant\sqrt{m}$，(7 分)

$\because a+b+c=2$，且 a,b,c 均为正数，

$\therefore 2=a+b+c=\left(\dfrac{a}{2}+b\right)+\left(\dfrac{a}{2}+c\right)\geqslant 2\sqrt{\dfrac{ab}{2}}+2\sqrt{\dfrac{ac}{2}}$，

$\therefore 2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}\leqslant 2\sqrt{2}$，

当且仅当 $a=1,b=c=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立，(9 分)

即 $2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}\leqslant\sqrt{m}$．(10 分)


微信搜一搜
自主选拔在线