衡中同卷

参考答案及解析

河北衡水中学2020届全国高三第二次联合考试(Ⅰ)·文科数学

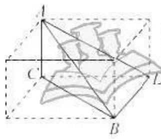
一、选择题

1. B 【解析】由题意，得集合$A=\{x|-1\leqslant x<1\}$，$B=\{-1,0,1\}$，则$A\cap B=\{-1,0\}$.故选B.

2. C 【解析】由题意可知$z=\frac{a+2i}{1-i}=\frac{(a+2i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(a-2)+(a+2)i}{2}$，由于$z$是纯虚数，所以$a=2$.故选C.

3. D 【解析】按照规定，读取的前5个号码依次是11，04，25，33，02(04重复去掉)，其中，02最小.故选D.

4. B 【解析】由几何体的三视图可知，该几何体为三棱锥A-CBD(如图)，由三视图可读取出相应的边长，即$AC=BD=1$，$CD=2$，该三棱锥的四个表面都是直角三角形，$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BCD}=1$，$S_{\triangle ABD}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以，各个表面中，面积最大的值为$\frac{\sqrt{5}}{2}$.故选B.



5. B 【解析】由函数的定义域为$\left\{x\left|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$可知，排除选项A，C.易知该函数为偶函数，且$f(\pi)<0$，故排除选项D.故选B.

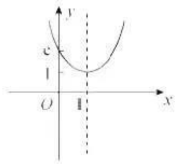
6. B 【解析】设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ.因为$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2=0$，即$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=-2|\boldsymbol{b}|^2$.因为$|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\theta=-4$，所以$|\boldsymbol{b}|=2$.故选B.

7. D 【解析】不超过20的三角数为1，3，6，10，15，随机抽取2个不同的数共有(1，3)，(1，6)，(1，10)，(1，15)，(3，6)，(3，10)，(3，15)，(6，10)，(6，15)，(10，15)10种情况，至少1个数是奇数有9种情况，则概率是$\frac{9}{10}$.故选D.

8. B 【解析】抛物线焦点为(0，1)，所以双曲线中$c^2=a^2+b^2=1$ ①，由$|MN|=3$，可知双曲线过点$\left(\frac{3}{2},-1\right)$，则$\frac{1}{a^2}-\frac{9}{4b^2}=1$ ②，联立①②可得$a^2=\frac{1}{4}$，$b^2=\frac{3}{4}$，所以渐近线方程为$y=\pm\frac{a}{b}x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$.故选B.

9. D 【解析】由正弦定理得$\sin A=\frac{a}{d}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$b+c=d(\sin B+\sin C)=7$，由余弦定理可知$\cos A=\frac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc}=\frac{1}{3}$，解得$bc=\frac{39}{8}$，所以，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{13\sqrt{2}}{8}$.故选D.

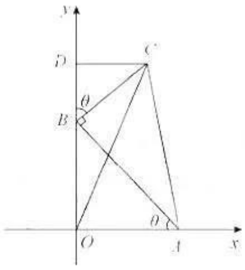
10. A 【解析】作出函数图象如图所示.因为当$f(a)=f(b)=m$，且满足$1\leqslant m<e$时，$a,b\in(0,2)$，且$a+b=2$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant2$，当且仅当$a=b=1$时等号成立.故选A.



11. D 【解析】由$f(x)=\cos\frac{\pi}{3}x+2$，可知函数$f(x)$的最小正周期为6，且函数为偶函数，在区间[0，3]上单调递减.因为$a=\log_2\frac{1}{7}=-\log_2 7$，所以$a\in(-3,-2)$，$-a\in(2,3)$.因为$b=\left(\frac{1}{7}\right)^2$，所以$0<b<1$.因为$c=2^{\frac{1}{7}}$，所以$c\in(1,2)$，因此，$f(a)<f(c)<f(b)$.故选D.

12. A 【解析】如图，设$\angle OAB=\theta$，则$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，由题意可得$C(2\sin\theta,4\sin\theta+2\cos\theta)$，则$OC=\sqrt{4\sin^2\theta+16\sin^2\theta+4\cos^2\theta+16\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{12+8\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$，因为$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以

$2\theta-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，因此，当 $2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{3\pi}{8}$ 时，OC 的长度取得最大值，故选 A.

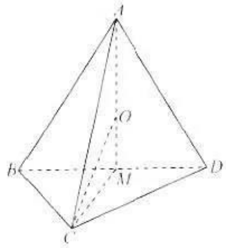


二、填空题

13. 3 或 $-\frac{3}{2}$　【解析】因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，由 $3a_1=a_1\cdot a_5$ 可得 $3a_3=a_3^2$，所以 $a_3=3$，由 $S_3=\frac{a_3}{q^2}+\frac{a_3}{q}+a_3=9$，可得 $\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1=3$，即 $2q^2-q-1=0$，解得 $q=1$ 或 $q=-\frac{1}{2}$，所以 $a_1=3$ 或 $a_1=-\frac{3}{2}$.

14. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$　【解析】由题意可知，抛物线的标准方程为 $x^2=12y$，由 $\overrightarrow{OF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$ 可知，$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，且过点 A，B 的直线经过焦点 F，设直线 AB 的方程为 $y=kx+3$，$A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，联立 $\begin{cases}x^2=12y,\\y=kx+3,\end{cases}$ 得 $x^2-12kx-36=0$，所以 $\begin{cases}x_A+x_B=12k & ①,\\x_A\cdot x_B=-36 & ②,\end{cases}$ 由 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$ 可知，$x_A=-3x_B$　③，联立①②③，可求得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以直线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$.

15. $\frac{81\pi}{4}$　【解析】如图，因为三棱锥的底面 BCD 为等腰直角三角形，所以 $\triangle BCD$ 的外接圆的圆心为 BD 的中点 M，连接 AM，CM，由题意可知该三棱锥的外接球球心 O 在 AM 上，$AM=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=4$，$CM=\frac{\sqrt{2}}{2}\times2=\sqrt{2}$，设球 O 的半径为 r，在 $\mathrm{Rt}\triangle OMC$ 中，利用勾股定理可得 $r^2=(AM-r)^2+CM^2$，即 $r^2=(4-r)^2+(\sqrt{2})^2$，解得 $r=\frac{9}{4}$，所以三棱锥 A-BCD 的外接球表面积为 $S=4\pi r^2=\frac{81\pi}{4}$.



16. $\frac{7\sqrt{3}-2\sqrt{21}}{2}$　【解析】$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AB^2=AC^2+BC^2-2\times AC\times BC\times\cos60^\circ=7$，所以 $AB=\sqrt{7}$，由题意知 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{\frac{1}{2}\times AB\times AD\times\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}\times AC\times AD\times\sin\angle CAD}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AC\times BC\times\sin60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+2}=\frac{7\sqrt{3}-2\sqrt{21}}{2}$.

三、解答题

（一）必考题

17. 解：(1) $1000\times\frac{4+16+6+24}{200}=250$（人），所以估计自主参加体育训练的次数低于 15 的人数为 250.　（1 分）

(2) 完成 2×2 列联表如下：

	积极型	消极型	总计
男生	80	20	100
女生	70	30	100
总计	150	50	200

（7 分）

$K^2=\frac{200\times(80\times30-70\times20)^2}{150\times50\times100\times100}=\frac{8}{3}\approx2.667<3.841$，　（10 分）

所以，不能在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下，认为评定类型与性别有关.　（12 分）

18. (1) 证明：因为四边形 $ABCD$ 是菱形，

所以 $AC\perp BD$，

又因为 $AC\perp PB$，$PB\cap BD=B$，

所以 $AC\perp$ 平面 PBD.

因为 $PD\subset$ 平面 PBD，所以 $AC\perp PD$.

又因为 $PD\perp CD$，$CD\cap AC=C$，

所以 $PD\perp$ 平面 $ABCD$. (4 分)

(2)解：如图，取 CD 的中点 N，连接 MN，BN.

因为 $\angle ADC=120°$，所以 $\angle DCB=60°$.

因而 $\triangle CDB$ 为等边三角形.

易知 MN 为 $\triangle PDC$ 的中位线，

所以 $MN\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $NB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $MN\perp NB$. (7 分)

在直角三角形 MNB 中，$MN=\dfrac{1}{2}$，$NB=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

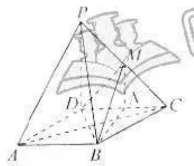
所以 $MB=1$.

在 $\triangle BDM$ 中，$MB=BD=1$，$MD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以等腰三角形 BDM 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{8}$. (10 分)

设点 C 到平面 BDM 的距离为 h，

则由 $V_{M-BCD}=V_{C-MBD}$ 可得 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{7}}{8}\cdot h$，所以 $h=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. (12 分)



19. 解：(1)若选①，则由题意可知 $2a_n=S_n+1$ ①，

当 $n\geqslant2$ 时，有 $2a_{n-1}=S_{n-1}+1$ ②， (2 分)

将①②作差可得 $a_n=2a_{n-1}$ $(n\geqslant2)$. (4 分)

因为 $a_1=1$，

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列.

所以 $a_n=2^{n-1}$. (6 分)

若选②，则由题意可得 $\dfrac{a_n}{2}=a_{n-1}$ $(n\geqslant2)$，

即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2(n\geqslant2)$. (3 分)

因为 $a_1=1$，所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，所以 $a_n=2^{n-1}$. (6 分)

若选③，则由题意得 $S_n-S_{n-1}=2S_{n-1}-2S_{n-2}$，

即 $a_n=2a_{n-1}$ $(n\geqslant3)$. (2 分)

因为 $a_1=1$，$S_2=3$，所以 $a_2=2$，所以 $a_2=2a_1$. (4 分)

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列.

所以 $a_n=2^{n-1}$. (6 分)

(2)由题意得 $b_n=2^{n-1}\cdot(n-1)$，

所以 $T_n=2^0\times0+2^1\times1+2^2\times2+\cdots+2^{n-2}\cdot(n-2)+2^{n-1}\cdot(n-1)$ ①，

$2T_n=2^1\times0+2^2\times1+2^3\times2+\cdots+2^{n-1}\cdot(n-2)+2^n\cdot(n-1)$ ②. (8 分)

①-②，得 $-T_n=2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-2^n\cdot(n-1)$，

所以，$T_n=(n-2)\cdot2^n+2$. (12 分)

20. 解：(1)由已知可得 $\begin{cases}c=\sqrt{3},\\ \dfrac{bc}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1,\end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. (3 分)

(2)由(1)可得 $P(2,0)$.

设 $N(x_N,y_N)$，易知直线 ON 的斜率 k 存在.

则直线 ON 的方程为 $y=kx$，代入 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，整理得 $(1+4k^2)x^2=4$.

因为点 N 在第一象限，所以 $x_N=\dfrac{2}{\sqrt{1+4k^2}}$，

所以 $N\left(\dfrac{2}{\sqrt{1+4k^2}},\dfrac{2k}{\sqrt{1+4k^2}}\right)$. (4 分)

因为 $ON\parallel MP$，所以直线 MP 的方程为 $y=k(x-2)$，

代入 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，

整理得 $(1+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$.

设 $M(x_M,y_M)$，则由根与系数的关系知 $2x_M=\dfrac{16k^2-4}{1+4k^2}$，即 $x_M=\dfrac{8k^2-2}{1+4k^2}$，

所以 $y_M=k\left(\dfrac{8k^2-2}{1+4k^2}-2\right)=-\dfrac{4k}{1+4k^2}$，

所以 $M\left(\dfrac{8k^2-2}{1+4k^2},-\dfrac{4k}{1+4k^2}\right)$. (6 分)

所以 $\overrightarrow{OM}=\left(\dfrac{8k^2-2}{1+4k^2},-\dfrac{4k}{1+4k^2}\right)$，$\overrightarrow{ON}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{1+4k^2}},\dfrac{2k}{\sqrt{1+4k^2}}\right)$.

因为 $ON\perp OM$，所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，

所以 $\dfrac{8k^2-2}{1+4k^2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{1+4k^2}}+\left(-\dfrac{4k}{1+4k^2}\right)\cdot\dfrac{2k}{\sqrt{1+4k^2}}=0$，解得 $k^2=\dfrac{1}{2}$. (8 分)

因为点 N 在第一象限，所以 $k>0$，所以 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故 $\overrightarrow{ON}=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$|\overrightarrow{ON}|=\sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=$

$\sqrt{2}\cdot\overrightarrow{OM}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

因为$\overrightarrow{OP}=(2,0)$，所以$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

所以$|\overrightarrow{MP}|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.　（10 分）

所以$\frac{|ON|}{|MP|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.　（12 分）

21. **解**：(1)由题意知 $f'(x)=3e^x-a$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

所以 $f(x)$在 **R** 上单调递增；　（2 分）

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $x>\ln\frac{a}{3}$，令 $f'(x)<0$，解得 $x<\ln\frac{a}{3}$.

所以 $f(x)$在$\left(-\infty,\ln\frac{a}{3}\right)$上单调递减，在$\left(\ln\frac{a}{3},+\infty\right)$上单调递增.　（4 分）

(2)设 $\varphi(x)=f(x)-g(x)=(3-2x)\cdot e^x-ax-3$，

则 $\varphi'(x)=(1-2x)\cdot e^x-a$.

令 $h(x)=(1-2x)\cdot e^x-a$，则 $h'(x)=(-1-2x)\cdot e^x$，当 $x\geqslant 0$ 时，$h'(x)<0$ 恒成立，

因此，$h(x)$在 $x\in[0,+\infty)$上单调递减.

所以，$h(x)\leqslant h(0)=1-a$.　（6 分）

当$1-a\leqslant 0$ 即 $a\geqslant 1$ 时，$h(x)\leqslant 0$恒成立，

因此 $\varphi(x)$在 $x\in[0,+\infty)$上单调递减.

所以，$\varphi(x)\leqslant\varphi(0)=0$ 恒成立，即 $f(x)\leqslant g(x)$恒成立；　（8 分）

当 $0\leqslant a<1$ 时，$h(0)=1-a>0$，$h(1)=-e-a<0$，所以存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $h(x_0)=0$，且当 $x\in(0,x_0)$时，$h(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增，此时 $\varphi(x_0)>\varphi(0)=0$ 不符合题意.　（10 分）

当 $a<0$ 时，$h(0)=1-a>0$，$h\left(\frac{1-a}{2}\right)<0$，所以存在 $x_0\in\left(0,\frac{1-a}{2}\right)$，使得 $h(x_0)=0$，且当 $x\in(0,x_0)$时，$h(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增，此时 $\varphi(x_0)>\varphi(0)=0$ 不符合题意.　（11 分）

综上所述，实数 a 的取值范围为$[1,+\infty)$.　（12 分）

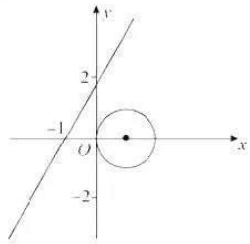
(二)选考题

22. **解**：(1)由参数方程可知，曲线 C_1 经过点$(-1,0)$，且斜率为$\sqrt{3}$.

所以曲线 C_1 的方程为$\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$.　（2 分）

由极坐标和直角坐标互化公式$\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2,\\ x=\rho\cos\theta,\end{cases}$可得曲线 C_2 的直角坐标方程为$(x-1)^2+y^2=1$.　（5 分）

(2)作出曲线 C_1 和 C_2 的图象如图所示.



由图象可知，曲线 C_1 和 C_2 相离.

设过曲线 C_1 上一点 P 作曲线C_2 的切线，且切线段长为 d，则有 $d^2=|PC_2|^2-1$.　（7 分）

因而，过圆心 C_2 作曲线 C_1 的垂线段，令垂足为 P，此时$|PC_2|$最小.

此时，$d=\sqrt{\left(\frac{|\sqrt{3}-0+\sqrt{3}|}{2}\right)^2-1}=\sqrt{2}$.

所以，所求切线段长的最小值为$\sqrt{2}$.　（10 分）

23. **解**：(1)原不等式等价为$|x+1|+|x-2|\geqslant 4$.

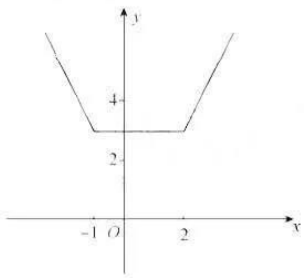
由绝对值的几何意义可知，数轴上到 2 和-1的距离和等于 4 的实数为$-\frac{3}{2}$，$\frac{5}{2}$.　（3 分）

所以原不等式的解集为$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.　（5 分）

(2)原不等式化简为$|x+1|+|x-2|\geqslant t^2-2t$.

所以 $t^2-2t\leqslant(|x-2|+|x+1|)_{\min}$.　（7 分）

设 $g(x)=|x+1|+|x-2|$，由图象(如图)可知，函数 $g(x)$的最小值为 3，即解不等式 $t^2-2t\leqslant 3$，解得$-1\leqslant t\leqslant 3$，所以实数 t 的取值范围为$[-1,3]$.（10 分）



自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国中学大联考 2020 届高三下学期模考试题及答案汇总（更新下载中），点击链接获得

http://www.zizzs.com/c/202002/42364.html