海南中学2023届高三年级数学第七次月考试题

（满分：150分；　　考试时间：120分钟）

一、单项选择题　　二、多项选择题（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	D	C	A	A	B	B	AB	AC	BCD	ABD

三、填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分）

13．9；　　14．3

15．$(\frac{4}{e^2},+\infty)$；　　16．243π；　$19-6\sqrt{5}$

四、解答题（本题共6小题，70分.解答应写出文字说明、证明过程或步骤）

17.（本小题满分10分）

在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$a\cos C+c\sin A=b$.

(1)求角A；

(2)$\overline{AD}=2\overline{DC}$，$BD=3$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

【详解】(1）解：由正弦定理可得$\sin A\cos C+\sin A\sin C=\sin B$，

因为$A+B+C=\pi$，所以$\sin A\cos C+\sin A\sin C=\sin(A+C)$，

即$\sin A\cos C+\sin A\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

整理得：$\sin A\sin C=\cos A\sin C$，因为$0<C<\pi$，所以$\sin C\neq 0$，

所以$\tan A=1$，因为$0<A<\pi$，所以$A=\frac{\pi}{4}$.　　…………5分

（2）在△ABD中，由余弦定理得：$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A$，

即 $9=AB^2+AD^2-\sqrt{2}AB\cdot AD\ge\left(2-\sqrt{2}\right)AB\cdot AD$.

整理得 $AB\cdot AD\le\dfrac{9\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}$，当且仅当 $AB=AD$ 时，等号成立，

所以 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}AB\cdot AD\le\dfrac{9\left(\sqrt{2}+1\right)}{4}$，

因为 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{3}{2}S_{\triangle ABD}\le\dfrac{27\left(\sqrt{2}+1\right)}{8}$，

所以△ABC 面积的最大值为 $\dfrac{27\left(\sqrt{2}+1\right)}{8}$.　　　　　　　　…………10 分

18.（本小题满分 12 分）

已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，满足 $a_1=1$，$a_n>0$，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n=S_n\cos n\pi$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n-1$ 项和 T_{2n-1}.

【详解】（1）解：因为 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}$，故 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

所以 $\dfrac{a_{n+1}+1}{n+1}=\dfrac{a_n+1}{n}$，故数列 $\left\{\dfrac{a_n+1}{n}\right\}$ 是常数列，

所以 $\dfrac{a_n+1}{n}=\dfrac{a_1+1}{1}=2$，故 $a_n=2n-1$.　　　　　　　　…………6 分

（2）解：知 $a_n=2n-1$，$S_n=\dfrac{n\left(a_1+a_n\right)}{2}=n^2$，故 $b_n=n^2\cos n\pi=\left(-1\right)^n n^2$，

对任意的$k\in\mathrm{N}^*$，$b_{2k-1}+b_{2k}=-(2k-1)^2+4k^2=4k-1$，

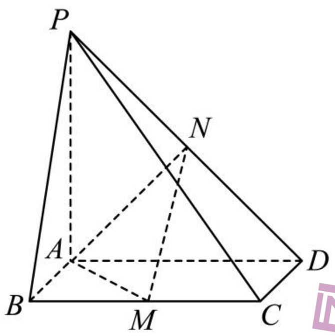
所以，T_{2n}即为数列$\{4k-1\}(k\in\mathrm{N}^*)$的前$n$项和，

因为$[4(k+1)-1]-(4k-1)=4$，故数列$\{4k-1\}(k\in\mathrm{N}^*)$为等差数列，

所以$T_{2n-1}=T_{2n}-b_{2n}=\dfrac{n(3+4n-1)}{2}-4n^2=n-2n^2$.　　　　…………12 分

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$AB=2$，$AD=AP=4$，M，N分别是BC，PD的中点.



(1)求证：$MN\,/\!/$平面PAB；

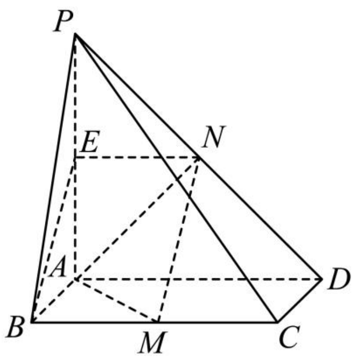
(2)再从条件①，条件②两个中选择一个作为已知条件，求平面AMN与平面$ABCD$夹角的余弦值.

条件①：$AD\perp MN$；

条件②：$AM=AN$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

【详解】（1）取 AP 中点 E，连接 EN， BE，



因为 N 为 PD 中点，所以有 $EN \mathbin{/\!/} AD$ 且 $EN=\frac{1}{2}AD$, 因为 $BM \mathbin{/\!/} AD$， $BM=\frac{1}{2}AD$，

所以 $EN \mathbin{/\!/} BM$ 且 $EN=BM$，所以四边形 $BMNE$ 为平行四边形, 所以 $BE \mathbin{/\!/} MN$，

又因为 $MN \not\subset$ 平面 PAB， $BE \subset$ 平面 PAB， 所以 $MN//$ 平面 PAB.

…………5分

（2）选择条件①： $AD \perp MN$

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$， $ABCD$ 为矩形, $AB \perp AD$，

平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD, AB \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AB \perp$ 平面 PAD，$PA \subset$ 平面 PAD，

所以 $AB \perp PA$，

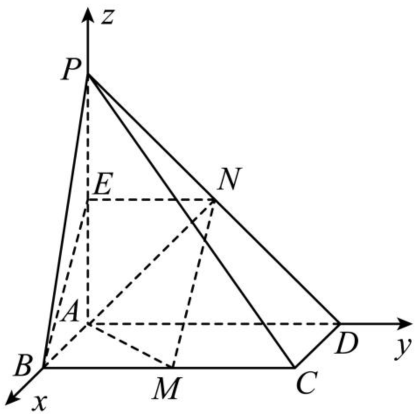
又因为 $AD \perp MN$， 由（1）可知 $BE \mathbin{/\!/} MN$， $BE \subset$ 平面 PAB，

所以 $AD \perp BE$，又因为 $AD \perp AB$， $AB \cap BE = B, AB, BE \subset$ 平面 PAB，

所以 $AD \perp$ 平面 PAB，$PA \subset$ 平面 PAB，所以 $PA \perp AD$，

$AB \cap AD = A, AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$，故 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，

以 A 为原点，以 AB， AD， AP 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立坐标系，



则 $A(0,0,0)$， $M(2,2,0)$， $N(0,2,2)$， $P(0,0,4)$,

则 $\overrightarrow{AM}=(2,2,0)$， $\overrightarrow{AN}=(0,2,2)$，设平面 AMN 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=2x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AN}=2y+2z=0\end{cases}$，令 $y=1$，则 $\vec{n}=(-1,1,-1)$，

因为 $AP\perp$ 平面 $ABCD$，故 $\overrightarrow{AP}=(0,0,4)$ 可作为平面 $ABCD$ 的法向量，

则平面 AMN 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值 $\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AP}\right\rangle\right|=\dfrac{4}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

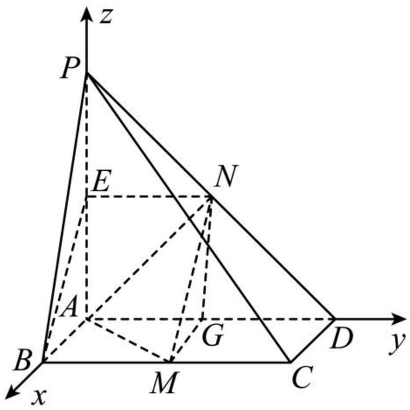
…………12 分

选择条件②： $AM=AN$.

因为平面 $ABCD\perp$ 平面 PAD， $ABCD$ 为矩形, $AB\perp AD$

平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD, AB\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AB\perp$ 平面 PAD, 所以 $AB\perp PA$,



又因为 $AM=AN$，

取 AD 中点为 G，连接 MG， NG，

则有 $MG=AG=2$， $NG\,//\,PA$， 所以 $\triangle ANG\cong\triangle AMG$，

所以 $\angle AGM=\angle AGN=90^\circ$，则 $NG\perp AD$，所以 $PA\perp AD$，

$AB\cap AD=A, AB, AD\subset$ 平面 $ABCD$，故 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

以 A 为原点，以 AB， AD， AP 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0)$， $M(2,2,0)$， $N(0,2,2)$， $P(0,0,4)$，

则 $\overrightarrow{AM}=(2,2,0)$， $\overrightarrow{AN}=(0,2,2)$， 设平面 AMN 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=2x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AN}=2y+2z=0\end{cases}$，令 $y=1$， 则 $\vec{n}=(-1,1,-1)$，

因为 $AP\perp$ 平面 $ABCD$， 故 $\overrightarrow{AP}=(0,0,4)$ 可作为平面 $ABCD$ 的法向量，

则平面 AMN 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值 $\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AP}\right\rangle\right|=\dfrac{4}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

…………12分

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2， 点 A,B 为椭圆 C 上两点.

(1)若直线 AB 过左焦点 F_1，求$\triangle ABF_2$的周长；

(2)若直线 AB 过点 $P(1,0)$，求$|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|$的取值范围；.

【详解】（1）由题意知 $a=2,b=1,c^2=a^2-b^2=3$ ，所以 $a=2,b=1,c=\sqrt{3}$ ，

$\triangle ABF_2$ 的周长为$|BF_1|+|BF_2|+|AF_1|+|AF_2|=4a=8$；　　…………4 分

（2）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

当直线 AB 斜率不存在时，直线方程为$x=1$，代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$中，

得：$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，$|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\times\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{3}{4}$，

当直线 AB 斜率为 0 时，$|\overrightarrow{PA}|=3,|\overrightarrow{PB}|=1$，所以$|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|=3$；

当直线 AB 斜率不为 0 时，设 $AB:x=my+1$，

由$\begin{cases}x=my+1\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$得$(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

所以 $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+4},y_1y_2=-\frac{3}{m^2+4}$，又$\overrightarrow{PA}=(x_1-1,y_1),\overrightarrow{PB}=(x_2-1,y_2)$，

所以$|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|=\sqrt{m^2+1}\cdot|y_1|\cdot\sqrt{m^2+1}\cdot|y_2|=(m^2+1)\cdot\frac{3}{m^2+4}$

$=3\left(1-\frac{3}{m^2+4}\right)\in\left[\frac{3}{4},3\right)$，

综上，$|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|$的取值范围是$\left[\frac{3}{4},3\right]$.

…………12分

21.（本小题满分12分）

玩具柜台五一前夕促销，在4月30日购买甲、乙系列的盲盒，并且集齐所有的产品就可以赠送大奖. 而每个甲系列盲盒可以开出玩偶A_1,A_2,A_3中的一个，每个乙系列盲盒可以开出玩偶B_1，B_2中的一个.

(1)记事件E_n：一次性购买n个甲系列盲盒后集齐A_1,A_2,A_3玩偶；事件F_n：一次性购买n个乙系列盲盒后集齐B_1，B_2玩偶；求$P(E_6)$及$P(F_5)$；

(2)柜台对甲、乙两个系列的盲盒进行饥饿营销，每个消费者每天只有一次购买机会，且购买时，只能选择其中一个系列的一个盲盒. 通过统计发现：第一次购买盲盒的消费者购买甲系列的概率为$\frac{1}{5}$，购买乙系列的概率为$\frac{4}{5}$：而前一次购买甲系列的消费者下一次购买甲系列的概率为$\frac{1}{4}$，购买乙系列的概率为$\frac{3}{4}$，前一次购买乙系列的消费者下一次购买甲系列的概率为$\frac{1}{2}$，购买乙系列的概率为$\frac{1}{2}$：如此往复，记某人第n次购买甲系列的概率为Q_n.

①求Q_2；

②若礼品店每卖出一个甲系列的盲盒可获利30元，卖出一个乙系列的盲盒可获利20元，由样本估计总体，若礼品店每天可卖出1000个盲盒，且买的人之前都已购买过很多次这两个系列的盲盒，估计该礼品店每天利润为多少元？

【详解】（1）由题意$P(E_6)=\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2+C_6^3C_3^2C_1^1A_3^3+3C_6^4A_2^2}{3^6}=\dfrac{20}{27}$，

$P(F_5)=1-\dfrac{1+1}{2^5}=\dfrac{15}{16}$. …………4分

（2）①由题意可知：$Q_1=\frac{1}{5},Q_2=\frac{1}{4}Q_1+\frac{1}{2}(1-Q_1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$. ………6分

②当$n\geq 2$时，$Q_n=\frac{1}{4}Q_{n-1}+\frac{1}{2}(1-Q_{n-1})=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}Q_{n-1}$，

所以$Q_n-\frac{2}{5}=-\frac{1}{4}\left(Q_{n-1}-\frac{2}{5}\right),Q_1-\frac{2}{5}=-\frac{1}{5}$,

所以$\left\{Q_n-\frac{2}{5}\right\}$是以$-\frac{1}{5}$为首项，$-\frac{1}{4}$为公比的等比数列，

所以$Q_n=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

因为每天购买盲盒的人都已购买过很多次，所以，对于每一个人来说，某天来购买盲盒时，可以看作n趋向无穷大，$Q_n=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$趋向$\frac{2}{5}$，

由样本估计总体可知：购买甲系列盲盒的概率近似于$\frac{2}{5}$，

假设用ξ表示一天中购买甲系列盲盒的个数，则$\xi\sim B\left(1000,\frac{2}{5}\right)$，

所以$E(\xi)=1000\times\frac{2}{5}=400$，即购买甲系列盲盒的个数的期望为400，

所以礼品店应卖出甲系列盲盒400个，乙系列盲盒600个.

估计利润为：$L=400\times 30+600\times 20=24000$（元）.

…………12分

22.（本小题满分12分）

已知函数$f(x)=m(1-x)\mathrm{e}^x+\ln x$，$m\in R$.

(1)若$m=0$，证明：$f(x)\leq x-1$.

(2)若$m\in(0,\mathrm{e}^{-1})$，

①证明：函数$f(x)$存在唯一的极值点β.

②若$f(\alpha)=0$，且$\alpha>\beta$，证明：$3\beta>2+\alpha$.

【详解】（1）令$h(x)=\ln x-x+1$，则$h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

所以当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$, $h(x)$单调递增；当$x>1$ 时，$h'(x)<0$, $h(x)$单调递减，

所以$h(x)\le h(1)=0$，从而$\mathrm{f}(x)=ln x\le x-1$，当且仅当$x=1$ 时等号成立，证毕.　　　　…………4 分

（2）①函数$f(x)=m(1-x)\mathrm{e}^x+\ln x$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，

则$f'(x)=\frac{1}{x}-mx\mathrm{e}^x=\frac{1-mx^2\mathrm{e}^x}{x}$，$x\in\left(0,+\infty\right)$.

令$g(x)=1-mx^2\mathrm{e}^x$，$m\in(0,\mathrm{e}^{-1})$，

则$g'(x)=-m(x^2+2x)\mathrm{e}^x<0$ 在$\left(0,+\infty\right)$上恒成立，

所以函数$g(x)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减.

因为$m\in(0,\mathrm{e}^{-1})$，所以$g(1)=1-m\mathrm{e}>0$，$\frac{1}{m}>\mathrm{e}$，$\ln\frac{1}{m}>1$，$g\left(\ln\frac{1}{m}\right)=1-\left(\ln\frac{1}{m}\right)^2<0$，

所以函数$g(x)=1-mx^2\mathrm{e}^x$在$\left(1,\ln\frac{1}{m}\right)$上存在唯一零点$\beta$.

又当$x\in(0,\beta)$时，$g(x)>0$，即$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，

当$x\in\left(\beta,+\infty\right)$时，$g(x)<0$，即$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减，

所以函数$f(x)$在$x=\beta$处取得极大值，即函数$f(x)$存在唯一的极值点β.

…………8分

②由①知，$f'(\beta)=0$，则 $1-m\beta^2\mathrm{e}^\beta=0$，即 $1=m\beta^2\mathrm{e}^\beta$，则$\frac{1}{\beta^2}=m\mathrm{e}^\beta$（*），

由$\alpha > \beta$，$\beta \in \left(1, \ln\frac{1}{m}\right)$，知$\alpha > 1$，

又$f(\alpha) = 0$，即$f(\alpha) = m(1-\alpha)\mathrm{e}^{\alpha} + \ln\alpha = 0$，则$\frac{\ln\alpha}{\alpha-1} = m\mathrm{e}^{\alpha}$（$**$），

（$**$）$\div$（$*$）得$\mathrm{e}^{\alpha-\beta} = \frac{\beta^2\ln\alpha}{\alpha-1}$,

由（1）知$\alpha > 1$时，$\ln\alpha < \alpha - 1$，所以$\frac{\beta^2\ln\alpha}{\alpha-1} < \frac{\beta^2(\alpha-1)}{\alpha-1} = \beta^2$，

所以$\mathrm{e}^{\alpha-\beta} < \beta^2$，则$\ln\mathrm{e}^{\alpha-\beta} < \ln\beta^2$，即$\alpha - \beta < 2\ln\beta < 2(\beta - 1)$，

即$\alpha - \beta < 2(\beta - 1)$，即$3\beta > 2 + \alpha$.

…………12分