2020 年高考全国Ⅲ卷真题及答案

全国Ⅲ卷适用地区：云南、广西、贵州、四川、西藏

理科数学试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{N}^*,y\geq x\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y=8\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为

A．2　　B．3　　C．4　　D．6

2．复数 $\dfrac{1}{1-3\mathrm{i}}$ 的虚部是

A．$-\dfrac{3}{10}$　　B．$-\dfrac{1}{10}$　　C．$\dfrac{1}{10}$　　D．$\dfrac{3}{10}$

3．在一组样本数据中，1，2，3，4 出现的频率分别为 p_1,p_2,p_3,p_4，且 $\sum\limits_{i=1}^{4}p_i=1$，则下面四种情形中，对应样本的标准差最大的一组是

A．$p_1=p_4=0.1,p_2=p_3=0.4$　　B．$p_1=p_4=0.4,p_2=p_3=0.1$

C．$p_1=p_4=0.2,p_2=p_3=0.3$　　D．$p_1=p_4=0.3,p_2=p_3=0.2$

4．Logistic 模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领域．有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$（t 的单位：天）的 Logistic 模型：$I(t)=\dfrac{K}{1+e^{-0.23(t-53)}}$，其中 K 为最大确诊病例数．当 $I(t^*)=0.95K$ 时，标志着已初步遏制疫情，则 t^*约为 $(\ln 19\approx 3)$

A．60　　B．63　　C．66　　D．69

5．设 O 为坐标原点，直线 $x=2$ 与抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 交于 D，E 两点，若 $OD\perp OE$，则 C 的焦点坐标为

A．$(\frac{1}{4},0)$　　B．$(\frac{1}{2},0)$　　C．$(1,0)$　　D．$(2,0)$

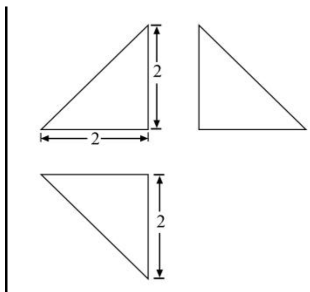
6．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=6$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=$

A．$-\frac{31}{35}$　　B．$-\frac{19}{35}$　　C．$\frac{17}{35}$　　D．$\frac{19}{35}$

7．在△ABC 中，$\cos C=\frac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则 $\cos B=$

A．$\frac{1}{9}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{2}{3}$

8．下图为某几何体的三视图，则该几何体的表面积是



A．$6+4\sqrt{2}$　　B．$4+4\sqrt{2}$　　C．$6+2\sqrt{3}$　　D．$4+2\sqrt{3}$

9．已知 $2\tan\theta-\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=7$，则 $\tan\theta=$

A．－2　　B．－1　　C．1　　D．2

10．若直线 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$ 都相切，则 l 的方程为

A．$y=2x+1$　　B．$y=2x+\frac{1}{2}$　　C．$y=\frac{1}{2}x+1$　　D．$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

11．设双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\sqrt{5}$．P 是 C 上一点，且 $F_1P\perp F_2P$．若△PF_1F_2 的面积为 4，则 a=

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

12．已知 $5^5<8^4$，$13^4<8^5$．设 $a=\log_5 3$，$b=\log_8 5$，$c=\log_{13} 8$，则

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若x，y满足约束条件$\begin{cases} x+y\geq 0, \\ 2x-y\geq 0, \\ x\leq 1, \end{cases}$则 $z=3x+2y$ 的最大值为____________.

14．$(x^2+\frac{2}{x})^6$ 的展开式中常数项是____________（用数字作答）．

15．已知圆锥的底面半径为1，母线长为3，则该圆锥内半径最大的球的体积为____________.

16．关于函数f（x）$=\sin x+\frac{1}{\sin x}$有如下四个命题：

①f（x）的图像关于y轴对称．

②f（x）的图像关于原点对称．

③f（x）的图像关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称．

④f（x）的最小值为2．

其中所有真命题的序号是____________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）

设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$．

（1）计算 a_2，a_3，猜想$\{a_n\}$的通项公式并加以证明；

（2）求数列$\{2^n a_n\}$的前 n 项和 S_n.

18. （12 分）

某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次，整理数据得到下表（单位：天）：

锻炼人次

锻炼人次 / 空气质量等级	[0，200]	（200，400]	（400，600]
1（优）	2	16	25
2（良）	5	10	12
3（轻度污染）	6	7	8
4（中度污染）	7	2	0

（1）分别估计该市一天的空气质量等级为 1，2，3，4 的概率；

（2）求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）；

（3）若某天的空气质量等级为 1 或 2，则称这天“空气质量好”；若某天的空气质量等级为 3 或 4，则称这天“空气质量不好”．根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表，并根据列联表，判断是否有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关？

	人次≤400	人次>400
空气质量好		
空气质量不好		

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	

．

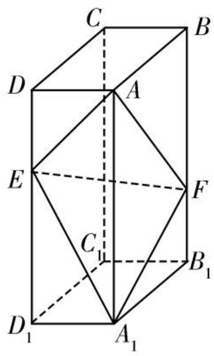
10.828

19. （12 分）

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 分别在棱 DD_1,BB_1 上，且 $2DE=ED_1$，$BF=2FB_1$．

（1）证明：点 C_1 在平面 AEF 内；

（2）若 $AB=2$，$AD=1$，$AA_1=3$，求二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值．



20. （12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{m^2}=1(0<m<5)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$，A，B 分别为 C 的左、右顶点．

（1）求 C 的方程；

（2）若点 P 在 C 上，点 Q 在直线 $x=6$ 上，且 $|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，求△APQ 的面积．

21. （12 分）

设函数 $f(x)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在点$(\frac{1}{2}，f(\frac{1}{2}))$处的切线与 y 轴垂直．

（1）求 b．

（2）若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点，证明：$f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2-t-t^2 \\ y=2-3t+t^2 \end{cases}$（$t$ 为参数且 $t\neq 1$），C 与坐标轴交于 A、B 两点.

（1）求 $|AB|$；

（2）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线 AB 的极坐标方程.

23．[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

设 a，b，$c\in\mathbf{R}$，$a+b+c=0$，$abc=1$.

（1）证明：$ab+bc+ca<0$；

（2）用 $\max\{a,b,c\}$ 表示 a，b，c 的最大值，证明：$\max\{a,b,c\}\geq\sqrt[3]{4}$.

理科数学参考答案

选择题答案

一、选择题

1．C	2．D	3．B	4．C
5．B	6．D	7．A	8．C
9．D	10．D	11．A	12．A

非选择题答案

二、填空题

13．7	14．240	15．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$	16．②③

三、解答题

17．解：（1）$a_2=5,a_3=7$，猜想 $a_n=2n+1$，由已知可得

$a_{n+1}-(2n+3)=3[a_n-(2n+1)]$，

$a_n-(2n+1)=3[a_{n-1}-(2n-1)]$，

……

$a_2-5=3(a_1-3)$．

因为 $a_1=3$，所以 $a_n=2n+1$.

（2）由（1）得 $2^n a_n=(2n+1)2^n$，所以

$S_n=3\times 2+5\times 2^2+7\times 2^3+\cdots+(2n+1)\times 2^n$．①

从而

$2S_n=3\times 2^2+5\times 2^3+7\times 2^4+\cdots+(2n+1)\times 2^{n+1}$.②

①－② 得

$-S_n=3\times 2+2\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+2\times 2^n-(2n+1)\times 2^{n+1}$，

所以 $S_n=(2n-1)2^{n+1}+2$.

18．解：（1）由所给数据，该市一天的空气质量等级为 1，2，3，4 的概率的估计值如下表：

空气质量等级	1	2	3	4
概率的估计值	0.43	0.27	0.21	0.09

（2）一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值为

$$\frac{1}{100}(100\times 20+300\times 35+500\times 45)=350\text{．}$$

（3）根据所给数据，可得 2×2 列联表：

	人次≤400	人次>400
空气质量好	33	37

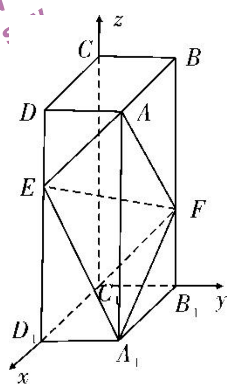
空气质量不好	22	8

根据列联表得

$$K^2=\frac{100\times(33\times8-22\times37)^2}{55\times45\times70\times30}\approx5.820 .$$

由于 $5.820>3.841$，故有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关.

19．解：设 $AB=a$，$AD=b$，$AA_1=c$，如图，以 C_1 为坐标原点，$\overrightarrow{C_1D_1}$ 的方向为 x 轴正方向，建立空间直角坐标系 C_1-xyz .



（1）连结 C_1F，则 $C_1(0,0,0)$，$A(a,b,c)$，$E(a,0,\frac{2}{3}c)$，$F(0,b,\frac{1}{3}c)$，$\overrightarrow{EA}=(0,b,\frac{1}{3}c)$，$\overrightarrow{C_1F}=(0,b,\frac{1}{3}c)$，得 $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{C_1F}$.

因此 $EA/\!/C_1F$，即 A,E,F,C_1 四点共面，所以点 C_1 在平面 AEF 内.

（2）由已知得 $A(2,1,3)$，$E(2,0,2)$，$F(0,1,1)$，$A_1(2,1,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,-1,-1)$，$\overrightarrow{AF}=(-2,0,-2)$，$\overrightarrow{A_1E}=(0,-1,2)$，$\overrightarrow{A_1F}=(-2,0,1)$.

设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$ 为平面 AEF 的法向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}-y-z=0,\\ -2x-2z=0,\end{cases}\text{可取 }\boldsymbol{n}_1=(-1,-1,1) .$$

设 $\boldsymbol{n}_2$ 为平面 A_1EF 的法向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1F}=0,\end{cases}\text{同理可取 }\boldsymbol{n}_2=(\frac{1}{2},2,1) .$$

因为$\cos\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，所以二面角$A-EF-A_1$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{7}$．

20．解：（1）由题设可得$\dfrac{\sqrt{25-m^2}}{5}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，得$m^2=\dfrac{25}{16}$，

所以C的方程为$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{\frac{25}{16}}=1$．

（2）设$P(x_P,y_P),Q(6,y_Q)$，根据对称性可设$y_Q>0$，由题意知$y_P>0$，

由已知可得$B(5,0)$，直线BP的方程为$y=-\dfrac{1}{y_Q}(x-5)$，所以$|BP|=y_P\sqrt{1+y_Q^2}$，

$|BQ|=\sqrt{1+y_Q^2}$，

因为$|BP|=|BQ|$，所以$y_P=1$，将$y_P=1$代入C的方程，解得$x_P=3$或-3．

由直线BP的方程得$y_Q=2$或8.

所以点P,Q的坐标分别为$P_1(3,1),Q_1(6,2);P_2(-3,1),Q_2(6,8)$．

$|P_1Q_1|=\sqrt{10}$，直线P_1Q_1的方程为$y=\dfrac{1}{3}x$，点$A(-5,0)$到直线P_1Q_1的距离为

$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，故$\triangle AP_1Q_1$的面积为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{2}\times\sqrt{10}=\dfrac{5}{2}$．

$|P_2Q_2|=\sqrt{130}$，直线P_2Q_2的方程为$y=\dfrac{7}{9}x+\dfrac{10}{3}$，点$A$到直线$P_2Q_2$的距离为

$\dfrac{\sqrt{130}}{26}$，故$\triangle AP_2Q_2$的面积为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{130}}{26}\times\sqrt{130}=\dfrac{5}{2}$．

综上，$\triangle APQ$的面积为$\dfrac{5}{2}$．

21．解：（1）$f'(x)=3x^2+b$．

依题意得$f'(\frac{1}{2})=0$，即$\dfrac{3}{4}+b=0$．

故$b=-\dfrac{3}{4}$．

（2）由（1）知 $f(x)=x^3-\frac{3}{4}x+c$，$f'(x)=3x^2-\frac{3}{4}$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{1}{2}$.

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的情况为：

x	$(-\infty,-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$c+\frac{1}{4}$	↙	$c-\frac{1}{4}$	↗

因为 $f(1)=f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4}$，所以当 $c<-\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 只有大于1的零点.

因为 $f(-1)=f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4}$，所以当 $c>\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 只有小于−1的零点.

由题设可知 $-\frac{1}{4}\le c\le\frac{1}{4}$，

当 $c=-\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 只有两个零点 $-\frac{1}{2}$ 和1.

当 $c=\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 只有两个零点−1和 $\frac{1}{2}$.

当 $-\frac{1}{4}<c<\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 有三个等点 x_1，x_2，x_3，且 $x_1\in(-1,-\frac{1}{2})$，$x_2\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$x_3\in(\frac{1}{2},1)$.

综上，若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于1的零点，则 $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于1.

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]

解：（1）因为 $t\ne1$，由 $2-t-t^2=0$ 得 $t=-2$，所以 C 与 y 轴的交点为（0，12）；由 $2-3t+t^2=0$ 得 $t=2$，所以 C 与 x 轴的交点为 $(-4,0)$.

故 $|AB|=4\sqrt{10}$.

（2）由（1）可知，直线 AB 的直角坐标方程为 $\frac{x}{-4}+\frac{y}{12}=1$，将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\sin\theta$ 代入，

得直线 AB 的极坐标方程 $3\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+12=0$.

23．[选修 4—5：不等式选讲]

解：（1）由题设可知，a，b 均不为零，所以

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]$$

$$=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

$$<0.$$

（2）不妨设 max{a，b，c}=a，因为 $abc=1,a=-(b+c)$，所以 a>0，b<0，c<0.由 $bc\le\frac{(b+c)^2}{4}$，可得 $abc\le\frac{a^3}{4}$，故 $a\ge\sqrt[3]{4}$，所以 $\max\{a,b,c\}\ge\sqrt[3]{4}$.