河北省高三年级上学期12月联考

数学参考答案

1. B　因为 $B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 7\}$，所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|7<x<9\}$.

2. D　因为 $a=3,b=4$，所以 $a+bi=3+4i$，$|a+bi|=5$.

3. A　因为 $3\sin^2\theta+5\sin\theta-2=0$，所以 $(3\sin\theta-1)(\sin\theta+2)=0$，解得 $\sin\theta=\frac{1}{3}$，所以 $\cos 2\theta=1-2\times\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$.

4. D　因为 $20\times70\%=14$，所以这个学习小组成员该次数学测试成绩的第70百分位数是 $\frac{90+95}{2}=92.5$.

5. C　对于A，$f(x)$ 为非奇非偶函数，故不满足题意. 来源：高三答案公众号

对于B，$f(x)$ 为 $(-2,2)$ 上的奇函数，且 $f(x)$ 为减函数，故不满足题意.

对于C，因为 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$，所以 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内单调递增，

又 $f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，故满足题意.

对于D，因为 $f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，故不满足题意.

6. A　依题意得50以内的质数有2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，共15个数，50以内的梅森数有 $2^2-1=3$，$2^3-1=7$，$2^5-1=31$，共3个数，所以从50以内的质数中任取两个数，则这两个数都为梅森数的概率 $P=\frac{C_3^2}{C_{15}^2}=\frac{1}{35}$，故选A.

7. C　易知 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=\ln(x+1)+\frac{2}{x+1}$，则 $f'(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

当 $x\in(-1,0]$ 时，$f(x)=-\ln(x+1)+\frac{2}{x+1}$，因为 $y=-\ln(x+1)$，$y=\frac{2}{x+1}$ 在 $(-1,0]$ 上都是单调递减函数，所以 $y=f(x)$ 也在 $(-1,0]$ 上单调递减，故 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极小值点，A错误，$x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，B错误，$f(x)_{\min}=f(1)=\ln 2+1$，C正确，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，所以 $f(x)$ 没有最大值，故D错误.

8. B　连接 PF_2（图略），因为 Q，O 分别为 PF_1，F_1F_2 的中点，所以 OQ 为 $\triangle PF_1F_2$ 的中位线，所以 PF_2 平行于渐近线 $y=-x$，联立方程组 $\begin{cases}y=-(x-2),\\x^2-y^2=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{3}{2},\\y=\frac{1}{2},\end{cases}$ 即 $P(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.

9. AC　若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $2m+2=m-1$，解得 $m=-3$，A正确；

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-m^2-1=0$ 无解，所以不存在 $m\in\mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，B错误；

因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,1)$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$，C正确；

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=-\frac{m^2+1}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}<0$，所以 θ 不可能为锐角，D错误.

10. AC　由圆 $C:x^2+y^2+Dx+Ey+3=0$ 的圆心坐标为 $(2,0)$，得 $D=-4$，$E=0$，A正确；圆C的标准方程为 $(x-2)^2+y^2=1$，半径是1，B错误；圆心C到直线 $3x-4y=0$ 的距离 $d=\frac{3\times2}{5}=\frac{6}{5}$，从而圆C上的点到直线 $y=\frac{3}{4}x$ 距离的最小值为 $\frac{6}{5}-1=\frac{1}{5}$，C正确，D错误.

11. BC　由题意得 $f'(x)=A\omega\cos(\omega x+\varphi)$，则 $f(2\pi)=f'(2\pi)$，即 $A\sin\varphi=A\omega\cos\varphi$，故 $\tan\varphi=\omega$. 因为 $\omega\in\mathbf{N}^*$，$|\varphi|<\frac{\pi}{3}$，所以 $\tan\varphi=\omega<\sqrt{3}$，所以 $\omega=1$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，则A错误；因为破碎的涌潮的波谷为 -4，所以 $f'(x)$ 的最

小值为-4,即$-A\omega=-4$,所以$A=4$,所以$f(x)=4\sin(x+\frac{\pi}{4})$,则$f(\frac{\pi}{3})=4\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=4(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,故B正确;因为$f(x)=4\sin(x+\frac{\pi}{4})$,所以$f'(x)=4\cos(x+\frac{\pi}{4})$,所以$f'(x-\frac{\pi}{4})=4\cos x$,则C正确;由$-\frac{\pi}{3}<x<0$,得$-\frac{\pi}{12}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$,因为$y=4\cos x$在$(-\frac{\pi}{12},0)$上单调递增,在$(0,\frac{\pi}{4})$上单调递减,所以$f'(x)$在区间$(-\frac{\pi}{3},0)$上不单调,则D错误.来源:高三答案公众号

12. ABC　如图1,将三棱柱补成正方体,J为对应边的中点,易知$\angle CPJ$为异面直线AC_1与CP所成角或补角.在$\triangle PCJ$中,$CP=CJ=\sqrt{5}$,$PJ=\sqrt{2}$,则$\cos\angle CPJ=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,故A正确.由题意可得三棱锥$C_1-ACP$的体积$V_{C_1-ACP}=V_{P-C_1CA}=\frac{1}{3}S_{\triangle C_1CA}\times2=\frac{4}{3}$,该"堑堵"的体积$V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times2\times2\times2=4$,则B正确.如图2,分别取$AA_1$,$A_1C_1$,$B_1C_1$的中点$E$,$F$,$G$,易知四边形$PEFG$是等腰梯形,且高为$\frac{\sqrt{6}}{2}$.
当E不是AA_1的中点时,PE不平行于平面$A_1B_1C_1$,则四边形$PEFG$不是梯形,从而等腰梯形有且仅有一个,其面积$S_{PEFG}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,故C正确.如图3,向下作截面,满足题意的梯形是直角梯形,同理,直角梯形有且仅有一个,其面积$S=\frac{1}{2}\times(1+2)\times\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,则D错误.

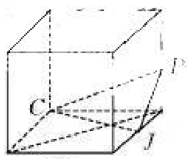


图1

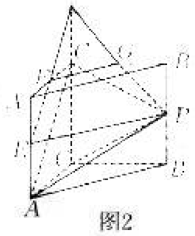


图2

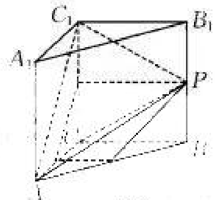
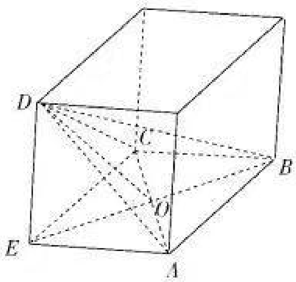


图3

13. 2　因为$12=a^2+9b^2\geqslant2a\cdot3b=6ab$,所以$ab\leqslant2$,当且仅当$\begin{cases}a=\sqrt{6},\\b=\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}a=-\sqrt{6},\\b=-\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$时,等号成立.

14. $(-\infty,\frac{1}{2})$　因为$f(x)=2^x-\frac{1}{x+1}$在$[0,+\infty)$上单调递增,所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增.因为$f(3x-1)<f(1-x)$,所以$3x-1<1-x$,解得$x<\frac{1}{2}$.

15. 41π　如图,取AC的中点O,连接OD,OB,因为$AB=BC=4$,$AD=DC=5$,所以$AC\perp OD$,$AC\perp OB$.
又因为$OD\cap OB=O$,所以$AC\perp$平面BOD,二面角$B-AC-D$的平面角为$\angle BOD$,延长BO,过D作$DE\perp BO$,垂足为E,因为$\cos\angle BOD=-\frac{2\sqrt{34}}{17}$,所以$\cos\angle EOD=\frac{2\sqrt{34}}{17}$.易知$OA=OB=OC=2\sqrt{2}$,$OD=\sqrt{17}$,在$\triangle EOD$中,由$\cos\angle EOD=\frac{2\sqrt{34}}{17}=\frac{EO}{\sqrt{17}}$,得$EO=2\sqrt{2}$,从而$DE=\sqrt{17-(2\sqrt{2})^2}=3$.



把三棱锥$D-ABC$补成如图所示的长方体,则空间四边形$ABCD$的外接球的直径为$DB=\sqrt{41}$,故外接球的表面积为41π.

16. $4+4\sqrt{5}$;$\frac{1}{2}$　设$D(x_1,y_1)$,抛物线$x^2=4y$的焦点为$F(0,1)$,易知四边形$ABED$关于x轴对称,所以它的

周长为$|AB|+2|AD|+2y_1$. 因为$|AB|=6$，$|DF|=y_1+1$，所以$|AB|+2|AD|+2y_1=6+2|AD|+2|DF|-2\geqslant 4+2|AF|=4+4\sqrt{5}$. 当且仅当$A,D,F$三点共线时，等号成立，此时$k_{AD}=k_{AF}=\frac{3-1}{4-0}=\frac{1}{2}$.

17. 解：(1)因为$c\sin A\cos B=\frac{4}{5}a\sin C$，所以$ac\cos B=\frac{4}{5}ac$，解得$\cos B=\frac{4}{5}$，从而$\sin B=\frac{3}{5}$. ………… 2分

因为$\triangle ABC$的面积为9，所以$\frac{1}{2}ac\times\frac{3}{5}=9$，即$ac=30$，…………………………………… 3分

所以$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=ca\cos B=30\times\frac{4}{5}=24$. …………………………………… 5分

(2)由(1)知$ac=30$，又$c=\frac{6}{5}a$，…………………………………… 7分

所以$\frac{6a^2}{5}=30$，解得$a=5$，从而$c=6$. …………………………………… 8分

所以$b^2=5^2+6^2-2\times5\times6\times\frac{4}{5}=13$，解得$b=\sqrt{13}$. …………………………………… 10分

18. 解：(1)当$n=1$时，$a_1=1$，…………………………………… 1分

当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，即$a_n=2a_{n-1}$，…………………………………… 2分

所以$\{a_n\}$是以1为首项，2为公比的等比数列，所以$a_n=2^{n-1}$. …………………………………… 3分

又$b_3=a_1+6=7$，$b_1+b_3=2b_2=10$，解得$b_2=5$，…………………………………… 5分

所以公差$d=7-5=2$，从而$b_n=2n+1$. …………………………………… 6分

(2)因为$c_n=(2n+1)\cdot2^{n-1}$，…………………………………… 7分

所以$T_n=3\times2^0+5\times2^1+7\times2^2+\cdots+(2n+1)\cdot2^{n-1}$，①…………………………………… 8分

$2T_n=3\times2^1+5\times2^2+7\times2^3+\cdots+(2n+1)\cdot2^n$，②…………………………………… 9分

由①－②得$-T_n=3+2(2+2^2+\cdots+2^{n-1})-(2n+1)\cdot2^n$，…………………………………… 11分

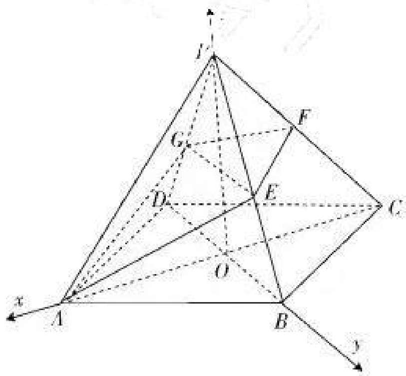
所以$T_n=(2n-1)\cdot2^n+1$. …………………………………… 12分

19. (1)证明：设$AC\cap BD=O$，连接PO.

因为$ABCD$为正方形，所以$BD\perp AC$，且O为AC，BD的中点.

因为$PB=PD$，所以$PO\perp BD$. …………………………………… 1分

因为$AC\cap PO=O$，且$AC,PO\subset$平面PAC，所以$BD\perp$平面PAC. ……………………………………… 2分



因为$BD/\!/$平面$AEFG$，$BD\subset$平面PBD，

且平面$AEFG\cap$平面$PBD=EG$，

所以$BD/\!/EG$，…………………………………… 4分

所以$EG\perp$平面PAC. …………………………………… 5分

(2)解：由(1)知$BD\perp AC$，且$PO\perp BD$.

因为$PA=PC$，且O为AC的中点，所以$PO\perp AC$.

因为$AC\cap BD=O$，所以$PO\perp$平面$ABCD$.

以O为坐标原点，$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OP}$的方向分别为$x,y,z$轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系. ……………………………………… 6分

设$PA=AB=2$，则$AO=BO=PO=\sqrt{2}$，所以$O(0,0,0)$，$A(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$C(-\sqrt{2},0,0)$，$D(0,-\sqrt{2},0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，$F(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，…………………………………… 7分

故$\overrightarrow{DB}=(0,2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AF}=(-\frac{3\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$. …………………………………… 8分

设平面$AEFG$的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，来源：高三答案公众号

所以$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EG}=\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}2\sqrt{2}y=0,\\ -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z=0,\end{cases}$ ……………………………… 9 分

令 $x=1$,则 $y=0,z=3$,所以 $\boldsymbol{m}=(1,0,3)$. ……………………………… 10 分

设直线 PB 与平面 $AEFG$ 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{PB}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\times\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. ……………………………… 12 分

20. 解:(1)设抽取的 3 天生产的零件个数都不高于 39 为事件 A,甲公司记录的 30 天中,有 $5+9=14$ 天生产的零件个数不高于 39, ……………………………… 2 分

则 $P(A)=\dfrac{C_{14}^{3}}{C_{30}^{3}}=\dfrac{13}{145}$. ……………………………… 4 分

(2)依题意,甲公司员工的日平均生产零件个数为 $38\times\dfrac{1}{6}+39\times\dfrac{3}{10}+40\times\dfrac{1}{6}+41\times\dfrac{1}{5}+42\times\dfrac{1}{6}=39.9$,

……………………………… 5 分

所以甲公司员工的日平均工资为 $140+2\times39.9=219.8$ 元. ……………………………… 6 分

设乙公司员工一天生产的零件数为 a,日工资为 X(单位:元),

当 $a=40$ 时,$X=40\times4=160$,

当 $a=41$ 时,$X=41\times4=164$, ……………………………… 7 分

当 $a=42$ 时,$X=42\times4=168$,

当 $a=43$ 时,$X=42\times4+1\times5=173$, ……………………………… 8 分

当 $a=44$ 时,$X=42\times4+2\times5=178$.

所以 X 的所有可能取值为 160,164,168,173,178. ……………………………… 9 分

故 X 的分布列为

X	160	164	168	173	178
P	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{10}$

……………………………… 10 分

所以 $E(X)=160\times\dfrac{1}{10}+164\times\dfrac{3}{10}+168\times\dfrac{1}{5}+173\times\dfrac{3}{10}+178\times\dfrac{1}{10}=168.5$,

乙公司员工的日平均工资为 168.5 元. ……………………………… 11 分

因为 $168.5<219.8$,所以推荐小明去甲公司应聘. ……………………………… 12 分

21. 解:(1)由点 $F(2,0)$ 得椭圆 C 的半焦距 $c=2$, ……………………………… 1 分

又椭圆 C 的离心率 $e=\dfrac{1}{2}=\dfrac{c}{a}$,所以 $a=4,b^2=a^2-c^2=12$, ……………………………… 3 分

所以椭圆 C 的标准方程 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$. ……………………………… 4 分

(2)当过点 F 的直线 l 的斜率为 0 时,其与抛物线 E 只有一个交点,不符合题意,

设直线 $l:x=my+2$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,联立方程组$\begin{cases}x=my+2,\\ 3x^2+4y^2=48,\end{cases}$

消去 x,得 $(3m^2+4)y^2+12my-36=0$,

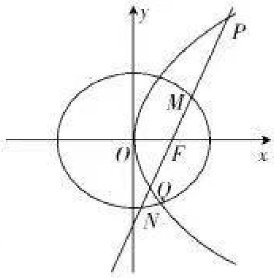
所以 $y_1+y_2=\dfrac{-12m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=\dfrac{-36}{3m^2+4}$, ……………………………… 6 分

所以 $|MN|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{\dfrac{144m^2}{(3m^2+4)^2}+\dfrac{144}{3m^2+4}}=\dfrac{24(m^2+1)}{3m^2+4}$. ……………………………… 8 分

联立方程组 $\begin{cases} x=my+2, \\ y^2=8x, \end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-8my-16=0$.

设 $P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$，则 $y_3+y_4=8m$，$y_3y_4=-16$，所以 $|PQ|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{64m^2+64}=8(m^2+1)$，…………………………………………………………………………………… 9 分

所以 $\dfrac{\lambda}{|MN|}-\dfrac{2}{|PQ|}=\dfrac{\lambda(3m^2+4)}{24(m^2+1)}-\dfrac{1}{4(m^2+1)}=\dfrac{3\lambda m^2+4\lambda-6}{24(m^2+1)}$，



令 $\dfrac{3\lambda}{24}=\dfrac{4\lambda-6}{24}$，得 $\lambda=6$. …………………………………… 11 分

当 $\lambda=6$ 时，$\dfrac{\lambda}{|MN|}-\dfrac{2}{|PQ|}=\dfrac{3\times6}{24}=\dfrac{3}{4}$，来源：高三答案公众号

即存在 $\lambda=6$，使得 $\dfrac{\lambda}{|MN|}-\dfrac{2}{|PQ|}$ 为定值 $\dfrac{3}{4}$. ………………………… 12 分

22. 证明：(1) $f'(x)=ae^{ax}-ax-1$. …………………………………………………………… 1 分

设 $g(x)=ae^{ax}-ax-1$，$g'(x)=a^2e^{ax}-a=a^2(e^{ax}-\dfrac{1}{a})$. ……………………………… 2 分

因为 $a\geqslant1$，$x\geqslant0$，所以 $e^{ax}\geqslant1$，$\dfrac{1}{a}\leqslant1$，所以 $e^{ax}-\dfrac{1}{a}\geqslant0$，

所以 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，…………………………………………………… 3 分

所以 $f'(x)\geqslant f'(0)=a-1\geqslant0$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数. ……………………… 4 分

又 $f(0)=0$，所以 $f(x)\geqslant0$. …………………………………………………………… 5 分

(2) 由 (1) 知，当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，且 $f(0)=0$，

所以 $e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-1\geqslant0$. …………………………………………………………… 6 分

即 $e^x\geqslant\dfrac{1}{2}x^2+x+1=\dfrac{x^2+2x+2}{2}>\dfrac{(x+1)^2}{2}$. ……………………………………… 8 分

所以 $x>2\ln(x+1)-\ln 2$. …………………………………………………………………… 9 分

设 $x=\dfrac{1}{n}$，得 $\dfrac{1}{n}>2\ln\dfrac{n+1}{n}-\ln 2=2\ln(n+1)-2\ln n-\ln 2$，…………………………… 10 分

所以 $1>2\ln 2-\ln 2$，

$\dfrac{1}{2}>2\ln 3-2\ln 2-\ln 2$，

$\dfrac{1}{3}>2\ln 4-2\ln 3-\ln 2$，

…

$\dfrac{1}{n}>2\ln(n+1)-2\ln n-\ln 2$，

所以 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}>2\ln(n+1)-n\ln 2$，即 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}>2\ln(n+1)-n\ln 2$. ………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。