高三联合考试
数学参考答案(理科)

1. D $z=\frac{2+i}{i(1-i)}=\frac{(2+i)(1-i)}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$,所以 z 在复平面内对应的点位于第四象限.

2. C 因为 $x^2+\frac{1}{x^2+1}=(x^2+1)+\frac{1}{x^2+1}-1\geqslant 2-1=1$,当且仅当 $x=0$ 时,等号成立,所以 $A=\{y|y\geqslant 1\}$. 又 $B=\{x|x<4\}$,所以 $A\cap B=[1,4)$.

3. B 由图可知,2021 年的创新产业指数低于 2010 年—2012 年这 3 年的创新产业指数总和.

4. A 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q,则 $a_6+a_7=q^5(a_1+a_2)=9q^3=72$,解得 $q=2$. 又 $a_1+a_2=9a_1=9$,所以 $a_1=1$,$S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=31$.

5. B 因为 $f(x)$ 是定义域内的增函数,所以 $\begin{cases}\frac{a}{2}\leqslant 2,\\ a>1,\\ a^2-5a\leqslant -2a-2,\end{cases}$ 解得 $1<a\leqslant 2$.

6. D 若 $l\perp m$,$m\subset\alpha$,则 l 与 α 的位置关系不确定,A 不正确. 若 $l/\!/\alpha$,$m\subset\alpha$,则 $l/\!/m$ 或 l 与 m 异面,B 不正确. 若 $\alpha/\!/\beta$,$l\subset\alpha$,$m\subset\beta$,则 $l/\!/m$ 或 l 与 m 异面,C 不正确. 若 $l\perp\alpha$,$m/\!/\alpha$,则 $l\perp m$,D 正确.

7. C 记抛物线 C 的准线为 l,作 $PT\perp l$ 于 T(图略),当 P,Q,T 三点共线时,$|PF|+|PQ|$ 有最小值,最小值为 $4+\frac{p}{2}=7$.

8. A 因为 $f(x-1)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数,所以 $f(-1)=0$,则 $g(-2)=f(-1)=0$. 又 $g(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数,所以 $g(2)=g(-2)=0$.

9. C 当 $a=1,b=2,m=4,n=1$ 时,$1\leqslant 4$,$M=3,a=2,b=3,n=2$,$2\leqslant 4$,$M=7,a=3,b=7,n=3$,$3\leqslant 4$,$M=16,a=7,b=16,n=4$,$4\leqslant 4$,$M=65,a=16,b=65,n=5$,$5>4$,程序结束,故输出的 $M=65$.

10. D 如图 3,记水的体积为 V_1,三棱柱的体积为 V,则 $V_1=\frac{1}{3}V$,所以在图 2 中,$V_{ADE-A_1FG}=\frac{2}{3}V$,则 $S_{\triangle ADE}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$,则 $\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

11. A 令函数 $f(x)=e^x-x-1$,则 $f'(x)=e^x-1$. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增. 故 $f(x)\geqslant f(0)=0$,则 $f(-\frac{4}{5})=e^{-\frac{4}{5}}-\frac{1}{5}=(\frac{1}{e})^{\frac{4}{5}}-\frac{1}{5}>0$. 令函数 $g(x)=\ln x-x+1$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1$. 当 $x\in(0,1)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减. 故 $g(x)\leqslant g(1)=0$,则 $g(\frac{6}{5})=\ln\frac{6}{5}-\frac{1}{5}=-\ln\frac{5}{6}-\frac{1}{5}<0$. 故 $c<b<a$.

12. D 因为 $|F_1F_2|=2|OB|$,O 为 F_1F_2 的中点,所以 $BF_1\perp BF_2$,则 $|BF_1|^2+|BF_2|^2=|F_1F_2|^2=4c^2$,即 $|BF_1|=\sqrt{4c^2-|BF_2|^2}$,①正确. 设 $\angle BOF_2=\theta$,则 $\tan\theta=\frac{b}{a}$,作 $AA_1\perp x$ 轴,垂足为 A_1,$BB_1\perp x$ 轴,垂足为 B_1(图略),则 $|OB_1|=|OB|\cos\theta=c\cdot\frac{a}{c}=a$,$|BB_1|=|OB|\cdot\sin\theta=c\cdot\frac{b}{c}=b$. 因为 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{F_1A}$,所以 $\frac{|AA_1|}{|BB_1|}=\frac{|A_1F_1|}{|B_1F_1|}=\frac{1}{3}$,解得 $|AA_1|=\frac{1}{3}b$,$|A_1F_1|=\frac{1}{3}(a+c)$,则 $A(\frac{1}{3}(a-2c),\frac{1}{3}b)$,则 $\frac{\frac{1}{9}(a-2c)^2}{a^2}-\frac{\frac{1}{9}b^2}{b^2}=1$,整理得 $\frac{1}{3}(2c-a)=\frac{\sqrt{10}}{3}a$,则 $e=\frac{c}{a}=\frac{1+\sqrt{10}}{2}$,②正确. 设直线 l 与双曲线 C 右支的交点为 M,则 $|MF_1|-|MF_2|=2a$. 因为 $||MB|-|MF_2||<|BF_2|$,所以 $|MB|-|MF_2|>-|BF_2|$,则 $|MF_1|-|MF_2|=|BF_1|+|MB|-|MF_2|>$

$|BF_1|-|BF_2|$，则 $|BF_1|-|BF_2|<2a$，③不正确. 设 $A(x_0,y_0)$，则 $|AF_1|=\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}=\sqrt{x_0^2+2cx_0+c^2+b^2(\frac{x_0^2}{a^2}-1)}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_0^2+2cx_0+a^2}=|\frac{c}{a}x_0+a|$，所以 $|AF_1|=-(\frac{c}{a}x_0+a)$. 由题意可知，$0<y_0<|BB_1|=b$，则 $a^2<x_0^2=a^2(1+\frac{y_0^2}{b^2})<2a^2$，则 $-\sqrt{2}a<x_0<-a$，故 $c-a<|AF_1|=-\frac{c}{a}x_0-a<\sqrt{2}c-a$，①正确.

13. $\frac{8}{3}$　因为 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $8-3m=0$，解得 $m=\frac{8}{3}$.

14. $(\frac{4}{3},\frac{11}{6}]$　$f(x)=\sqrt{3}\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})+2\cos^2(\omega x+\frac{\pi}{12})-1=\sqrt{3}\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})+\cos(2\omega x+\frac{\pi}{6})=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})$，因为 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上恰有 3 个零点，所以 $3\pi<2\omega\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant4\pi$，解得 $\frac{4}{3}<\omega\leqslant\frac{11}{6}$.

15. 480　先让其余 4 位专家站成一排，则不同的站法有 $A_4^4=24$ 种，并形成 5 个空位，再从 5 个空位中站入甲、乙两位专家，不同的站法有 $A_5^2=20$ 种，则不同的站法有 $24\times20=480$ 种.

16. 32　设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_1^2+(a_1+d)^2=32$，所以 $S_9-a_{33}=9a_1+36d-a_1-32d=8a_1+4d=4a_1+4(a_1+d)\leqslant8\sqrt{\frac{a_1^2+(a_1+d)^2}{2}}=32$，当且仅当 $a_1=4$，$d=0$ 时，等号成立.

17. 解：(1)补充的表中数据如下：

	关注	不关注	合计
男性用户	35	15	50
女性用户	20	30	50
合计	55	45	100

…………………………………………………………………………………… 4 分

估计男性用户关注航空航天技术的概率 $P_1=\frac{35}{50}=\frac{7}{10}$；女性用户关注航空航天技术的概率 $P_2=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$.

…………………………………………………………………………………… 6 分

(2) $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{100(35\times30-15\times20)^2}{50\times50\times55\times45}=\frac{100}{11}\approx9.091$，………… 10 分

因为 $9.091<10.828$，…………………………………………………… 11 分

所以没有 99.9% 的把握认为是否关注航空航天技术与性别有关. ………………… 12 分

18. (1)证明：因为 $\sin A=\cos B$，所以 $A=\frac{\pi}{2}-B$ 或 $A=\frac{\pi}{2}+B$. …………………… 1 分

又 $a\cos C=c$，所以 $\sin A\cos C=\sin C$.

若 $A=\frac{\pi}{2}-B$，则 $C=\pi-(A+B)=\frac{\pi}{2}$，则 $\sin A\cos C\neq\sin C$，不符合题意. ………… 2 分

故 $A=\frac{\pi}{2}+B$，则 $C=\pi-(A+B)=\frac{3\pi}{2}-2A$. ……………………………………… 3 分

由 $\sin A\cos C=\sin C$，得 $\sin A\cos(\frac{3\pi}{2}-2A)=\sin(\frac{3\pi}{2}-2A)$，则 $\sin A\sin 2A=\cos 2A$，

则 $2\sin^2A\cos A=\cos 2A$，即 $2(1-\cos^2A)\cos A=\cos 2A$，…………………………… 5 分

故 $2\cos^3A+\cos 2A=2\cos A$. ……………………………………………………… 6 分

(2)解：因为 $\sin A=\cos B=\sqrt{3}\sin C$，所以 $a=\sqrt{3}c$，所以 $A=\frac{\pi}{2}+B$，$C=\pi-(A+B)=\frac{\pi}{2}-2B$. ……… 8 分

$\cos B=\sqrt{3}\sin C=\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{2}-2B)=\sqrt{3}\cos 2B=2\sqrt{3}\cos^2B-\sqrt{3}$，解得 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\cos B=-\frac{\sqrt{3}}{3}$（舍去），所以 $B=\frac{\pi}{6}$，$A=\frac{\pi}{2}+B=\frac{2\pi}{3}$，$C=\frac{\pi}{6}$. ……………………………… 10 分

因为 $b=1$，所以 $c=1$，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}$. ………………………… 12 分

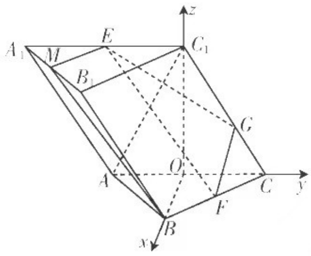
19.（1）证明：取 A_1B_1 的中点 M，连接 ME，MB. ………………………… 1 分

因为 E，F 分别是棱 A_1C_1，BC 的中点，所以 $ME /\!/ B_1C_1 /\!/ BF$，$ME=\frac{1}{2}B_1C_1=\frac{1}{2}BC=BF$，

所以四边形 $MEFB$ 为平行四边形，$EF /\!/ MB$. ………………………… 3 分

因为 $EF\not\subset$ 平面 ABB_1A_1，$MB\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $EF /\!/$ 平面 ABB_1A_1. ………………………… 4 分

（2）解：取 AC 的中点 O，连接 OB，OC_1，AC_1.



因为四边形 ACC_1A_1 是菱形，所以 $CA=CC_1$.

因为 $\angle ACC_1=60^\circ$，所以 $\triangle ACC_1$ 为等边三角形.

因为 O 为 AC 的中点，所以 $C_1O\perp AC$.

因为平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC，平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $ABC=AC$，$C_1O\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $C_1O\perp$ 平面 ABC.

因为底面 ABC 是正三角形，所以 $OB\perp AC$. ………………………… 6 分

以 O 为原点，OB，OC，OC_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

因为 $AC=2$，所以 $C_1O=\sqrt{3}$，则 $B(\sqrt{3},0,0)$，$E(0,-1,\sqrt{3})$，$F(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，$G(0,\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，所以 $\overrightarrow{EF}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EG}=(0,\frac{5}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3})$. ………………………… 8 分

设平面 EFG 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y-\sqrt{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EG}=\frac{5}{3}y-\frac{2\sqrt{3}}{3}z=0,\end{cases}$

令 $y=2\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{n}=(4,2\sqrt{3},5)$. ………………………… 9 分

因为 $\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$，

所以 $|\cos\langle\overrightarrow{BC},\boldsymbol{n}\rangle|=|\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BC}||\boldsymbol{n}|}|=|\frac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{53}}|=\frac{\sqrt{159}}{53}$.

故直线 B_1C_1 与平面 EFG 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{159}}{53}$. ………………………… 12 分

20. 解：（1）设椭圆的焦距为 $2c$.

由题意可得 $\begin{cases}\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{a^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=2,\\ b^2=1,\\ c^2=1.\end{cases}$ ………………………… 3 分

故椭圆 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………… 4 分

（2）当直线 l 的斜率为 0 时，以 AB 为直径的圆方程为 $x^2+y^2=1$.

当直线 l 的斜率不存在时，以 AB 为直径的圆方程为 $(x-\frac{1}{3})^2+y^2=\frac{16}{9}$.

联立 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ (x-\frac{1}{3})^2+y^2=\frac{16}{9},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\ y=0,\end{cases}$ 故若存在定点 M，则此定点为 $M(-1,0)$. ………………………… 6 分

当直线 l 的斜率存在，且不为 0 时，设直线 l：$x=my+\frac{1}{3}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x^2+\frac{y^2}{2}=1,\\ x=my+\frac{1}{3},\end{cases}$ 整理得 $(18m^2+9)y^2+12my-16=0$，

则 $y_1+y_2=-\frac{12m}{18m^2+9}, y_1y_2=-\frac{16}{18m^2+9}$. ………………………………………… 8 分

因为 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+1,y_1)\cdot(x_2+1,y_2)=(my_1+\frac{4}{3})(my_2+\frac{4}{3})+y_1y_2=(m^2+1)y_1y_2+\frac{4}{3}m(y_1+y_2)$

$+\frac{16}{9}=\frac{-16(m^2+1)}{18m^2+9}+\frac{4}{3}m\cdot\frac{-12m}{18m^2+9}+\frac{16}{9}=\frac{-16m^2-16}{18m^2+9}+\frac{-16m^2}{18m^2+9}+\frac{16(2m^2+1)}{9(2m^2+1)}=0$, ………… 10 分

所以以 AB 为直径的圆经过定点 $M(-1,0)$. ………………………………………… 11 分

综上,以 AB 为直径的圆经过定点 $M(-1,0)$. ………………………………………… 12 分

21. (1)证明:因为 $a=1$,所以 $f(x)=\ln x+x-e^x$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}+1-e^x$. 易知 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.
………………………………………………………………………… 1 分

又 $f'(\frac{1}{2})=3-e^{\frac{1}{2}}>0, f'(1)=2-e<0$,所以 $\exists x_0\in(\frac{1}{2},1), f'(x_0)=0$. ………………………… 3 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减. …………… 4 分

故 x_0 是 $f(x)$ 唯一的极值点且为极大值点. ………………………………………… 5 分

(2)解:由 $f(1)=\frac{1}{a}-e\leqslant 0$,解得 $a\geqslant\frac{1}{e}$. 下面证明当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时满足要求. ………………………… 6 分

令函数 $g(a)=a\ln x+\frac{x}{a}-e^x, a\geqslant\frac{1}{e}$,则 $g'(a)=\ln x-\frac{x}{a^2}$. ………………………………… 7 分

因为 $x\in(0,1]$,所以 $g'(a)=\ln x-\frac{x}{a^2}<0$,则 $g(a)$ 在 $[\frac{1}{e},+\infty)$ 上单调递减,则 $g(a)_{\max}=g(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}(\ln x$ $+e^2x-e^{x+1})$,下面证 $\ln x+e^2x-e^{x+1}\leqslant 0$ 即可. ………………………………………… 9 分

令函数 $h(x)=\ln x+e^2x-e^{x+1}, 0<x\leqslant 1$,则 $h'(x)=\frac{1}{x}+e^2-e^{x+1}$,易知 $h'(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减,则 $h'(x)$ $\geqslant h'(1)=1>0$,则 $h(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增,故 $h(x)\leqslant h(1)=0$. ………………………… 11 分

综上所述,a 的取值范围为 $[\frac{1}{e},+\infty)$. ………………………………………… 12 分

22. 解:(1)由 $\begin{cases}x=-2+t,\\ y=\frac{m}{4}t\end{cases}$ 消去参数 t,得 C_1 的普通方程为 $mx-4y+2m=0$. ………………………… 3 分

因为 $\rho=2\cos\theta$,所以 $\rho^2=2\rho\cos\theta$,则 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x=0$. ………………………… 5 分

(2)由(1)可知,C_2 是圆心为 $(1,0)$,半径为 1 的圆. ………………………………………… 6 分

因为 C_1 与 C_2 有公共点,所以 $\frac{|3m|}{\sqrt{m^2+16}}\leqslant 1$, ………………………………………… 8 分

解得 $-\sqrt{2}\leqslant m\leqslant\sqrt{2}$,故 m 的取值范围为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. ………………………………… 10 分

23. 解:(1)因为 $a=1$,所以 $f(x)=|2x-1|+|x-3|$. ………………………………………… 1 分

当 $x\geqslant 3$ 时,不等式为 $3x-4\leqslant 4$,不等式无解. ………………………………………… 2 分

当 $\frac{1}{2}<x<3$ 时,不等式为 $x+2\leqslant 4$,解得 $\frac{1}{2}<x\leqslant 2$. ………………………………………… 3 分

当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时,不等式为 $-3x+4\leqslant 4$,解得 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$. ………………………………………… 4 分

综上所述,当 $a=1$ 时,不等式 $f(x)\leqslant 4$ 的解集为 $[0,2]$. ………………………………………… 5 分

(2) $f(x)+|x-3a|=|2x-a|+|2x-6a|\geqslant|5a|$. ………………………………………… 7 分

当 $a\geqslant 0$ 时,则 $5a\geqslant a^2+4$,解得 $1\leqslant a\leqslant 4$. ………………………………………… 8 分

当 $a<0$ 时,则 $-5a\geqslant a^2+4$,解得 $-4\leqslant a\leqslant -1$. ………………………………………… 9 分

综上所述,a 的取值范围为 $[-4,-1]\cup[1,4]$. ………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线