2023年江西省 分宜中学 玉山一中 临川一中 南城一中 南康中学 高安中学 彭泽一中 泰和中学 樟树中学 高三联合考试

数学试卷（理科）

答案

一、选择题：（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	D	B	C	A	D	A	C	C	B	C

二、填空题：（每小题5分，共20分）

13. 60　　14. 6　　15. $\left[0,\frac{1}{4}\right]$　　16. $(-\infty,1]$

三、解答题：

17. （1）$\because a_1=1$，$a_1+b_1=3$，$\therefore b_1=2$.

$\because a_4=-7$，$\therefore b_4=9-a_4=9-(-7)=16$.$\therefore q^3=\frac{b_4}{b_1}=8$，解得 $q=2$，

所以 $b_n=b_1q^{n-1}=2\times 2^{n-1}=2^n$，$\therefore a_n=2n+1-2^n$.

（2）由（1）知 $a_n=2n+1-2^n$，

所以 $S_n=\frac{n(3+2n+1)}{2}-\frac{2(1-2^n)}{1-2}=n(n+2)-2(2^n-1)=n^2+2n+2-2^{n+1}$，

$\therefore S_n+2^{n+1}\geq 50$ 可化为 $n^2+2n-48\geq 0$，解得 $n\geq 6$，

$\therefore$ 正整数 n 的最小值为6.

18. (1) $\because P(\xi\leq 50)=P(\xi\geq 70)$，$\therefore \mu=\frac{50+70}{2}=60$.

设“至少有一名学生进入面试”为事件 A，

$\because \mu=60$，$\sigma=10$，

$\therefore P(\xi\leq 70)=\frac{1+P(|X-\mu|\leq\sigma)}{2}\approx\frac{1+0.6827}{2}=0.84135$，

$\therefore P(A)=1-0.84135^{10}\approx 1-0.1777=0.8223$，

故10人中至少有一人进入面试的概率 0.8223.

(2)X的可能取值为0，1，2，3，4，

$P(X=0)=C_2^0(1-\frac{1}{3})^2C_2^0(1-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{9}$，

$P(X=1)=C_2^1\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3})C_2^0(1-\frac{1}{2})^2+C_2^0(1-\frac{1}{3})^2C_2^1\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$，

$P(X=2)=C_2^2(\frac{1}{3})^2C_2^0(1-\frac{1}{2})^2+C_2^1\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{3})C_2^1\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{2})+C_2^0(1-\frac{1}{3})^2C_2^2(\frac{1}{2})^2=\frac{13}{36}$，

$P(X=3)=C_2^2(\frac{1}{3})^2C_2^1\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{2})+C_2^1\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{3})C_2^2(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{6}$，

$P(X=4)=C_2^2(\frac{1}{3})^2C_2^2(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{36}$，

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

$\therefore E(X)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{13}{36}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{36}=\frac{5}{3}$.

19.(1)证明：过点D作$DO\perp AC$交AC与点O，

$\because$平面$ABC\perp$平面ACD，平面$ABC\cap$平面$ACD=AC$，$DO\subset$平面ACD，

$\therefore DO\perp$平面ABC，又$\because DE//$平面ABC，$\therefore DO\perp DE$，

又$\because AD\perp DE$，且$AD\cap DO=D$，$AD,DO\subset$平面ACD，

$\therefore DE\perp$平面ACD；

(2)过点E作$EN\perp BC$交BC于点N，连接ON，

$\because$平面$ABC\perp$平面BCE，平面$ABC\cap$平面$BCE=BC$，$EN\subset$平面BCE，

$\therefore EN\perp$平面ABC，

又因为$DO\perp$平面ABC，所以$DO//EN$.

$\because DE//$平面ABC，$\therefore D,E$到平面ABC的距离相等，

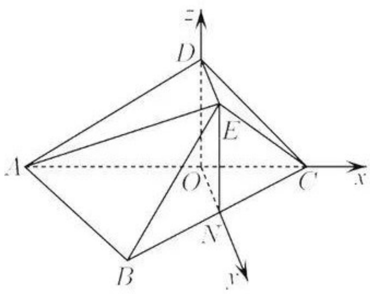
$\therefore DO//EN$且$DO=EN$，$\therefore$四边形$ONED$是平行四边形，

$\therefore ON//DE$，$ON\perp$平面ACD，$\therefore CO=ON,DE=ON$，$\therefore V_{ABCDE}=V_{E-ABC}+$

$V_{E-ACD}=\frac{1}{3}EN\cdot S_{\triangle ABC}+\frac{1}{3}DE\cdot S_{\triangle ACD}=\frac{1}{3}EN+\frac{1}{3}DE\cdot DO=\frac{1}{3}DO(1+DE)$

又$DO^2+DE^2=DO^2+CO^2=CD^2=1$，令$DE=x(0\leqslant x\leqslant 1)$，

则$V_{ABCDE}=f(x)=\frac{1}{3}DO(1+DE)=\frac{\sqrt{1-x^2}\times(1+x)}{3}$，$f(x)'=\frac{1+x}{3\sqrt{1-x^2}}(1-2x)$，



当$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$f'(x)>0$，当$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时，$f'(x)<0$，

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递减，

即$V_{ABCDE}\leqslant f(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{4}$，当且仅当$DE=\frac{1}{2}$时取得最大值.

如图所示，以点O为原点建立空间直角坐标系$O-xyz$，

则$A(-\frac{3}{2},0,0),B(-\frac{1}{2},1,0),E(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),C(\frac{1}{2},0,0),D(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，

所以$\overrightarrow{AM}=(\frac{7}{6},\frac{5}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}),\overrightarrow{CD}=(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$.

设AM与CD所成角为α，则$\cos\alpha=\left|\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CD}\rangle\right|=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{2\sqrt{77}}{77}$，

即当几何体$ABCDE$体积最大时，AM与CD所成角的余弦值为$\frac{2\sqrt{77}}{77}$.

20. （1）设点M的坐标(x_0,y_0)，点M在线段AB上，满足$|BM|=2|MA|$，

$\therefore\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(-a,1)=\left(-\frac{a}{3},\frac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=(a,0)+\left(-\frac{a}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{2a}{3},\frac{1}{3}\right)$，

故$x_0=\frac{2a}{3}$，$y_0=\frac{1}{3}$，因为$\frac{y_0}{x_0}=\frac{1}{4}$，$\therefore\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}a}=\frac{1}{4}$，解得：$a=2$，$\therefore$椭圆$E$的方程$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）当直线l斜率不存在时，直线l的方程为$x=n$，

所以$n^2+4n^2=4$，$n^2=\frac{4}{5}$，此时$d=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，当直线l的斜率存在时，设直线l的方程为$y=kx+m$，

$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，原点O到直线l的距离为d，所以$\frac{|m|}{\sqrt{1^2+k^2}}=d$，

整理得$m^2=d^2(k^2+1)$，由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx+m\end{cases}$，可得$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

$\Delta=(8km)^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)=16(4k^2-m^2+1)>0$，

$x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$=k^2\cdot\frac{4m^2-4}{4k^2+1}+km\cdot\frac{-8km}{4k^2+1}+m^2=\frac{m^2-4k^2}{4k^2+1}$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}+\frac{m^2-4k^2}{4k^2+1}=\frac{5m^2-4k^2-4}{4k^2+1}=0$

$5m^2-4k^2-4=0$， $5d^2\left(1+k^2\right)-4k^2-4=0$，恒成立，即$\left(5d^2-4\right)\left(k^2+1\right)=0$恒成立 ，

所以$5d^2-4=0$，所以$d=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以定圆C的方程是$x^2+y^2=\frac{4}{5}$

所以当$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$时 ， 存在定圆$C$始终与直线$l$相切 ，其方程是$x^2+y^2=\frac{4}{5}$.

解：(1)由$h(x)=f(x)-1=e^x+2ax-1$，得$h'(x)=e^x+2a$，

当$a\geq 0$时，因为$h(-1)=(\frac{1}{e}-1)-2a<0$，不合题意；

当$a<0$时，当$x\in(-\infty,\ln(-2a))$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，

当$x\in(\ln(-2a),+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

所以$h(x)_{\min}=h(\ln(-2a))=-2a+2a\ln(-2a)-1$，

要$h(x)\geq 0$，只需$h(x)_{\min}=-2a+2a\ln(-2a)-1\geq 0$，

令$s(x)=x-x\ln x-1$，则$s'(x)=-\ln x$，

当$x\in(0,1)$时，$s'(x)>0$，$s(x)$单调递增；当$x\in(1,+\infty)$时，$s'(x)<0$，$s(x)$单调递减，

所以$s(x)\leq s(1)=0$，则由$s(-2a)=-2a+2a\ln(-2a)-1\geq 0$得$-2a=1$，

所以$a=-\frac{1}{2}$，故实数a取值的集合$\{-\frac{1}{2}\}$.

(2) ①由已知$F(x)=e^x-ax^2+2ax-1$，$F'(x)=e^x-2ax+2a$，

因为函数$F(x)$有两个不同的极值点x_1，x_2，所以$F'(x)=e^x-2ax+2a$有两个不同零点，

若$a\leq 0$时，则$F'(x)$在R上单调递增，$F'(x)$在R上至多一个零点，与已知矛盾，舍去；

当$a>0$时，由$e^x-2ax+2a=0$，得$\frac{1}{2a}=\frac{x-1}{e^x}$，令$\varphi(x)=\frac{x-1}{e^x}$

所以$\varphi'(x)=\frac{2-x}{e^x}$，当$x\in(-\infty,2)$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增；

当$x\in(2,+\infty)$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减；所以$\varphi(x)_{\max}=\varphi(2)=\frac{1}{e^2}$，

因为$\varphi(1)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{e^x}=0$，所以$0<\frac{1}{2a}<\frac{1}{e^2}$，所以$a>\frac{e^2}{2}$，故实数$a$的取值范围为$(\frac{1}{2}e^2,+\infty)$.

②设$x_1<x_2$，由 ①则$1<x_1<2<x_2$，

因为$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$，所以$e^{x_1}=2ax_1-2a$，$e^{x_2}=2ax_2-2a$，

则$\frac{e^{x_2}}{e^{x_1}}=\frac{x_2-1}{x_1-1}$，取对数得$x_2-x_1=\ln(x_2-1)-\ln(x_1-1)$，

令$x_1-1=t_1$，$x_2-1=t_2$，则$t_2-t_1=\ln t_2-\ln t_1$，即$t_2-\ln t_2=t_1-\ln t_1(0<t_1<1<t_2)$，

令$u(t)=t-\ln t$，则$u(t_1)=u(t_2)$，

因为$u'(t)=t-\frac{1}{t}$，所以$u(t)=t-\ln t$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

令$v(t)=u(t)-u(\frac{1}{t})=t-\frac{1}{t}-2\ln t$，则$v'(t)=\frac{(t-1)^2}{t^2}\geq 0$，$v(t)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又$v(1)=0$，所以当$t\in(0,1)$时，$v(t)<v(1)=0$，即$u(t)<u(\frac{1}{t})$，

因为$t_2>1$，$2-t_1>1$，$u(t)=t-\ln t$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$t_2<\frac{1}{t_1}$，

所以$x_2-1<\frac{1}{x_1-1}$，即$x_1x_2<x_1+x_2$，所以$x_1x_2<x_1+x_2<\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}e^2}(x_1+x_2)<\frac{2}{3}\sqrt{a}(x_1+x_2)$，

故 $3x_1x_2<2\sqrt{a}(x_1+x_2)$成立.

22.解析:（1）因为圆 E 以$(3,0)$为圆心且与圆 O 外切，所以其半径为$|OE|-1=2$.

所以圆 E 的普通方程为$(x-3)^2+y^2=4$.

由$(x-3)^2+y^2=4$, 得 $x^2+y^2-6x+5=0$. 由$\begin{cases}x^2+y^2=\rho^2,\\ x=\rho\cos\theta,\end{cases}$

得圆 E 的极坐标方程为 $\rho^2-6\rho\cos\theta+5=0$.

（2）由题意得$|OA|=1$, 所以$|OB|+|OC|=5$.

把$\theta=\alpha$ 代入 $\rho^2-6\rho\cos\theta+5=0$, 得 $\rho^2-6\rho\cos\alpha+5=0$,

则$|OB|,|OC|$是 $\rho^2-6\rho\cos\alpha+5=0$ 的两个根，

所以$|OB|+|OC|=6\cos\alpha=5$, 解得 $\cos\alpha=\frac{5}{6}$, 所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{11}}{6}$,

所以 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{11}}{5}$, 所以直线 BC 的斜率为$\frac{\sqrt{11}}{5}$.

23.（1）证明：因为a,b,c为正数，所以$\frac{a}{2}+1=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{a}$（当且仅当$a=1$时，取等号）。

同理可得$\frac{b}{2}+1\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{b}$（当且仅当$b=1$时取等号），$\frac{c}{2}+1\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{c}$（当且仅当$c=1$时取等号）。因为正数$a,b,c$满足$abc=1$，

所以$\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{b}{2}+1\right)\left(\frac{c}{2}+1\right)\geq\frac{27}{8}\sqrt[3]{abc}=\frac{27}{8}$（当且仅当$a=b=c=1$时取等号）

（2）因为正数a,b,c满足$abc=1$.所以$ab+bc+ca\geq3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3,a+b+c\geq3\sqrt[3]{abc}=3$.

因为正数m,n满足$m+n=1$，

所以 $(am+n)(bm+n)(cm+n)=abcm^3+(ab+bc+ac)m^2n+(a+b+c)mn^2+n^3$

$\geq m^3+3m^2n+3mn^2+n^3=(m+n)^3=1$ （当且仅当$a=b=c=1$时取等号）。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。