2023—2024 学年新高二秋季开学考
数学参考答案及评分细则

1.【答案】D

【解析】$\frac{\sin 300°}{\tan 135°}=\frac{\sin(360°-60°)}{\tan(180°-45°)}=\frac{-\sin 60°}{-\tan 45°}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故选 D.

2.【答案】A

【解析】因为 $1+\mathrm{i}(2-a-a\mathrm{i})=a+1+(2-a)\mathrm{i}$ 为纯虚数,所以$\begin{cases}a+1=0,\\2-a\neq0,\end{cases}$解得 $a=-1$,故选 A.

3.【答案】A

【解析】因为 $U=\{-1,3,5,7,9\}$,$\complement_U A=\{-1,5,9\}$,所以 $A=\{3,7\}$,因为 $B=\{3,7,9\}$,所以 $A\cap B=\{3,7\}$,故选 A.

4.【答案】B

【解析】因为 $\boldsymbol{a}=\left(x,\frac{1}{3}\right)$,$\boldsymbol{b}=(|x|,9)$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x|x|+3=0$,$x=-\sqrt{3}$,故选 B.

5.【答案】C

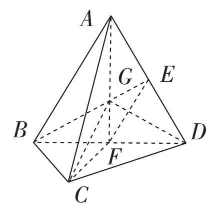
【解析】24 是样本容量,A 正确;第一届参加总决赛的人数为$\frac{6}{24}\times120=30$,所以第二届与第三届参加总决赛的选手共有 90 人,B 正确;120 名选手中女选手的人数为$\frac{15}{24}\times120=75$,所以男选手有 45 人,C 错误;因为第一届参加总决赛的选手共有 30 人,所以 D 正确,故选 C.

6.【答案】C

【解析】由 $a>b$ 且 $a+b=2$,可得 $2a>a+b=2$,$a>1$,A 正确;由 $a>0$,$a>b$ 可得 $a^2>ab$,B 正确;取 $a=3$,$b=-1$,则 $ab>b^2$ 不成立,C 错误;$a^2+b^2=a^2+(2-a)^2=2(a-1)^2+2>2$,D 正确,故选 C.

7.【答案】D

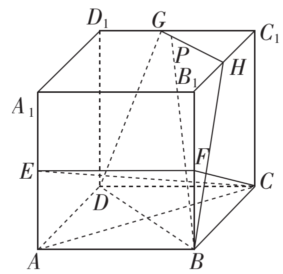
【解析】如图,取 BD 的中点 F,连接 BE,AF 交于点 G,因为$\triangle ABD$ 是边长为 2 的正三角形,所以 $GA=GB=GD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,$GF=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$CF=\frac{1}{2}BD=1$,$AF\perp CF$,所以 $GC=\sqrt{GF^2+CF^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以点 G 为球 O_1 的球心,球 O_1 的半径 $R_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,由题意可得 $BC\perp CD$,$BE\perp AD$,所以 $FB=FD=FC=FE=1$,点 F 为球 O_2 的球心,球 O_2 的半径 $R_2=1$,球 O_1 与球 O_2 的体积之比为$\frac{R_1^3}{R_2^3}=\frac{8\sqrt{3}}{9}$,故选 D.



8.【答案】A

【解析】如图所示,取 BB_1 的中点 F,C_1D_1 的中点 G,B_1C_1 的中点 H,连接 EF,CF,BH,GH,则 $GH/\!/BD$,点 B,D,G,H 共面,在正方形 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中有 $EA\perp BD$,$AC\perp BD$,$EA\cap AC=A$,所以 $BD\perp$平面 ACE,因为 $EC\subset$平面 ACE,所

以 $BD\perp CE$,在 $\mathrm{Rt}\triangle BB_1H$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle CBF$ 中,$\tan\angle B_1BH=\tan\angle BCF=\frac{1}{2}$,所以$\angle B_1BH=\angle BCF$,因为$\angle BFC+\angle BCF=\frac{\pi}{2}$,所以$\angle BFC+\angle B_1BH=\frac{\pi}{2}$,所以 $BH\perp CF$,由 E,F 分别为 AA_1,BB_1 的中点可得 $EF\perp BH$,$EF\cap CF=F$,所以 $BH\perp$平面 EFC,因为 $EC\subset$平面 EFC,所以 $BH\perp EC$,$BD\cap BH=B$,所以 $EC\perp$平面 $BDGH$,因为点 P 为底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上的动点,所以点 P 的轨迹为线段 GH,且 $GH=\sqrt{2}$,故选 A.



9.【答案】AC

【解析】由点 $P(-1,3)$在第二象限,可得 α 是第二象限角,但不一定是钝角,A 正确,B 错误;$\tan\alpha=\frac{3}{-1}=-3$,C 正确;由 $\sin\alpha>0$,$\cos\alpha<0$,则点$(\sin\alpha,\cos\alpha)$在第四象限,D 错误,故选 AC.

10.【答案】BCD

【解析】因为 $a=\log_2 6$,$b=\log_3 6$,由对数函数的性质知 $a>b$,A 错误;由$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_6 2+\log_6 3=1$,B 正确;由 $a=\log_2 6=1+\log_2 3$ 得 $a-1=\log_2 3$,由 $b=\log_3 6$,得 $b-1=\log_3 2$,所以$(a-1)(b-1)=\log_2 3\cdot\log_3 2=1$,C 正确;$\log_{18}6=\frac{\log_3 6}{\log_3 18}=\frac{\log_3 6}{1+\log_3 6}=\frac{b}{1+b}$,D 正确,故选 BCD.

11.【答案】BCD

【解析】对于 A,事件 A,B 相互独立是事件 $\overline{A},B$ 相互独立的充要条件,A 不满足;对于 B,$f(x)=x^2-2ax$ 在$(1,+\infty)$上单调递增的充要条件是 $a\leqslant 1$,所以 $a<1$ 是 $f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增的充分不必要条件,所以 B 满足;对于 C,若 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$,则 α 是第三象限角,$\sin\alpha<0$,$\tan\alpha>0$,所以 $\sin\alpha-\tan\alpha<0$,充分性成立,取 $\alpha=\frac{\pi}{3}$,则 $\sin\alpha-\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$,必要性不成立,C 满足;对于 D,点 A,B 到平面 α 的距离都为 1,当点 A,B 在平面 α 同侧时,AB 与 α 平行,当点 A,B 在平面 α 两侧时,AB 与 α 相交,充分性成立,必要性显然不成立,D 满足,故选 BCD.

12.【答案】ACD

【解析】由题意得$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}$,所以 $\omega_0=\frac{12}{5}$,A 正确;此时$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{2\pi}{5}+\varphi\right)=1$,所以$-\frac{2\pi}{5}+\varphi=\frac{\pi}{6}$,$\varphi=\frac{17\pi}{30}$,B 错误;由$f(x)=2\sin\left(\frac{12}{5}x+\frac{17\pi}{30}\right)$,得$f\left(-\frac{\pi}{36}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2$,故$f(x)$的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{36}$对称,C 正确;由$\frac{12}{5}x+\frac{17\pi}{30}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $x=-\frac{\pi}{36}+\frac{5}{12}k\pi,k\in\mathbf{Z}$,故 $x_1+x_2=-\frac{\pi}{36}\times 2=-\frac{\pi}{18}$,$x_2+x_3=2\times\left(-\frac{\pi}{36}+\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{7\pi}{9}$,所以 $x_1+2x_2+x_3=\frac{13\pi}{18}$,D 正确,故选 ACD.

13.【答案】$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

【解析】由函数 $y=e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,而函数 $y=x-x^2$ 在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$上单调递增,所以$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$上单调递增.

14.【答案】$\frac{7}{10}$

【解析】因为$\frac{\frac{3}{2}-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(3-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{2(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{4}{5}-\frac{1}{10}\mathrm{i}$,所以 $a=\frac{4}{5}$,$b=-\frac{1}{10}$,$a+b=\frac{7}{10}$.

15.【答案】-2

【解析】因为$f(x)$是奇函数,所以$f(x)+f(-x)=\frac{3^{x+1}-1}{3^x-1}+a+a\sin 2x+\frac{3^{-x+1}-1}{3^{-x}-1}+a-a\sin 2x=\frac{3^{x+1}-1}{3^x-1}+\frac{3^x(3^{-x+1}-1)}{1-3^x}+2a=\frac{4(3^x-1)}{3^x-1}+2a=4+2a=0$,所以 $a=-2$.

16.【答案】$4-2\sqrt{5}$

【解析】由题可得四边形 $CDEH$ 是菱形,$CH=EH=AB=2$,由$\frac{EH}{HB}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$,可得 $HA=HB=\frac{4}{\sqrt{5}+1}=\sqrt{5}-1$,在$\triangle AEH$ 中,由 $AE=EH=2$,$HA=\sqrt{5}-1$,可得 $\cos\angle AHE=\frac{\frac{1}{2}HA}{EH}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$,所以 $\cos\angle AHB=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$,因为$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CH}$,

所以$(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DE})\cdot\overrightarrow{HA}=(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CH})\cdot\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HA}=(\sqrt{5}-1)\times(\sqrt{5}-1)\times\frac{1-\sqrt{5}}{4}=4-2\sqrt{5}$.

【评分细则】

13. 填写$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$也给分,填写 $x\leqslant\frac{1}{2}$,$\{x|x\leqslant\frac{1}{2}\}$都不给分;

14. 填写 0.7 也正确.

16. 填写分母含有根式的式子不给分.

17. 解:(1)因为 $x\in[0,\pi]$,所以$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,(1 分)

因为 $y=\sin x$ 在$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增,在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$上单调递减,

且 $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\sin\frac{\pi}{2}=1$,

所以$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$,$\frac{\sqrt{2}}{4}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$,(4 分)

所以$f(x)$在$[0,\pi]$上的值域为$\left[\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right]$.(5 分)

(2)由$f(\alpha)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{10}$,得 $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$,(7 分)

所以 $\sin\alpha=-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-1=2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2-1=-\frac{7}{25}$.(10 分)

【评分细则】

1. 第(1)小题值域用集合表示,若正确,也给满分;

2. 如用其他解法,若正确,也给满分.

18. 解:(1)$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$,(2 分)

因为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是单位向量,且$|\overrightarrow{AB}|=3$,

所以$\overrightarrow{AB}^2=(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}^2=10+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=9$,(4 分)

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{6}$.(6 分)

(2)由(1)知$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=3\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}+(t+2)\boldsymbol{b}$,(8 分)

因为 A,B,C 三点共线,所以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$共线,设$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$,

则 $2\boldsymbol{a}+(t+2)\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$,即 $2\boldsymbol{a}+(t+2)\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+3\lambda\boldsymbol{b}$,(10 分)

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,所以$\begin{cases}\lambda=2,\\3\lambda=t+2,\end{cases}$所以 $t=4$.(12 分)

【评分细则】

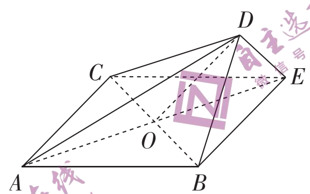
1. 手写向量不带箭头,若解法正确,也给分,但酌情扣 1 ~2 分;
2. 如用其他解法,若正确,也给满分.

19.(1)证明:设 BC 的中点为 O,因为四边形 $ABEC$ 为菱形,所以 $AO\perp BC$,(2 分)

因为 $BD=CD$,所以 $OD\perp BC$,(3 分)

因为 $AO\cap OD=O$,$AO,OD\subset$平面 AOD,所以 $BC\perp$平面 AOD,(5 分)

因为 $AD\subset$平面 AOD,所以 $BC\perp AD$.(6 分)



(2)解:由 $BC\perp$平面 AOD,可得 $BO=1$ 是三棱锥 $B-ADE$ 的高,(8 分)

在$\triangle ADE$ 中 $AO=OD=OE$,所以 $AD\perp DE$,

因为 $AE=2AB\cos 30°=2\sqrt{3}$,$AD=3$,所以 $DE=\sqrt{AE^2-AD^2}=\sqrt{3}$,

所以$\triangle ADE$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DE=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.(10 分)

所以 $V_{\text{三棱锥}A-BDE}=V_{\text{三棱锥}B-ADE}=\frac{1}{3}\cdot BO\cdot S=\frac{1}{3}\times1\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.(12 分)

【评分细则】

1. 第(1)小题,若不写 $AO\cap OD=O$,$AO,OD\subset$平面 AOD,$AD\subset$平面 AOD 可酌情扣分,最多扣 2 分;
2. 如用其他解法,若正确,也给满分.

20.解:(1)因为 $45\%\times10=4.5$,所以 45% 分位数为第 5 个数据 7.8.(3 分)

(2)$\bar{x}=\frac{6.2+6.5+6.9+7.3+7.8+8.3+9.1+9.9+10.3+10.7}{10}=8.3$,(5 分)

$s^2=\frac{(-2.1)^2+(-1.8)^2+(-1.4)^2+(-1)^2+(-0.5)^2+0^2+0.8^2+1.6^2+2^2+2.4^2}{10}=2.382$.(7 分)

(3)不小于 45% 分位数的数据有 7.8,8.3,9.1,9.9,10.3,10.7,从中任取 2 个不同数据,结果有:

(7.8,8.3),(7.8,9.1),(7.8,9.9),(7.8,10.3),(7.8,10.7),(8.3,9.1),(8.3,9.9),(8.3,10.3),(8.3,10.7),(9.1,9.9),(9.1,10.3),(9.1,10.7),(9.9,10.3),(9.9,10.7),(10.3,10.7),共有 15 种,(8 分)

$A=\{(9.9,10.3),(9.9,10.7),(10.3,10.7)\}$,$P(A)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$,(9 分)

$B=\{(8.3,10.7),(9.1,9.9),(10.3,10.7)\}$,$P(B)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$,(10 分)

$AB=\{(10.3,10.7)\}$,$P(AB)=\frac{1}{15}$,(11 分)

所以 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{1}{3}$.(12 分)

【评分细则】

1. 第(3)小题,若直接写出样本空间中的结果有 15 种,没有列举,不扣分;

2. 若写 $P(A+B)=\frac{5}{15}$,没有约分,扣 1 分;

3. 如用其他解法,若正确,也给满分.

21. (1)证明:因为 $C_1E=\frac{1}{3}CE$,所以 $C_1E=\frac{1}{2}CC_1$,

又 D 为 AA_1 的中点,所以 $AD=\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{2}CC_1$,

所以 $C_1E=AD$,又 $C_1E/\!/AD$,

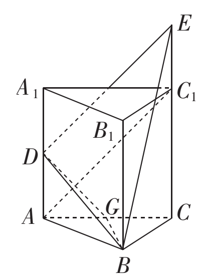
所以四边形 $ADEC_1$ 为平行四边形,

所以 $DE/\!/AC_1$,(3 分)

因为 $DE\subset$平面 BDE,$AC_1\not\subset$平面 BDE,

所以 $AC_1/\!/$平面 BDE.(6 分)

(2)解:取 AC 的中点 G,连接 BG,DG,



因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱且 $AA_1=AB$,

所以 $DG\perp DE$,$BG\perp$平面 ACC_1A_1,(7 分)

因为 $DE\subset$平面 ACC_1A_1,所以 $BG\perp DE$,(8 分)

因为 $BG\cap DG=G$,所以 $DE\perp$平面 BDG,

因为 $BD\subset$平面 BDG,$DE\perp BD$,

所以$\angle BDG$ 就是二面角 $B-DE-C$ 的平面角,(10 分)

因为 $BG=\frac{\sqrt{3}}{2}AC$,$DG=\sqrt{2}AG=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$,

所以 $\tan\angle BDG=\frac{BG}{DG}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}AC}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

即二面角 $B-DE-C$ 的正切值为$\frac{\sqrt{6}}{2}$.(12 分)

【评分细则】

1. 第(1)小题,在证明 $DE/\!/AC_1$ 后,若不指出 $AC_1\not\subset$平面 BDE,扣 1 分;

2. 如用其他解法,若正确,也给满分.

22. 解:(1)由$\frac{b\sin A}{15}=\frac{a\sin C}{21}=\frac{c\sin B}{35}$及正弦定理得$\frac{ba}{15}=\frac{ac}{21}=\frac{cb}{35}$,(1 分)

所以$\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$,$\frac{b}{c}=\frac{5}{7}$,(2 分)

设 $a=3k(k>0)$,则 $b=5k$,$c=7k$,(3 分)

由余弦定理得 $\cos C=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot 3k\cdot 5k}=-\frac{1}{2}$,

又因为 $0<C<\pi$,所以 $C=\frac{2\pi}{3}$.(6 分)

(2)若选①,

因为 $c=14$,由(1)得 $7k=14$,$k=2$,$a=3k=6$,$b=5k=10$,

则△EFC 的周长为$\frac{6+10+14}{2}=15$,(7 分)

设 $CE=x(0<x\leqslant 10)$,$CF=y(0<y\leqslant 6)$,

由余弦定理得 $EF=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{x^2+y^2+xy}$,

所以 $x+y+\sqrt{x^2+y^2+xy}=15$,(9 分)

因为 $\sqrt{x^2+y^2+xy}=\sqrt{(x+y)^2-xy}\geqslant\sqrt{(x+y)^2-\frac{(x+y)^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$,

所以 $x+y\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2+y^2+xy}$,当且仅当 $x=y$ 时取等号,

所以 $x+y+\sqrt{x^2+y^2+xy}\leqslant\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\sqrt{x^2+y^2+xy}=\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)EF$,

所以$\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)EF\geqslant 15$,$EF\geqslant\frac{15}{1+\frac{2\sqrt{3}}{3}}=30\sqrt{3}-45$,当且仅当 $x=y=30-15\sqrt{3}$时取等号,

所以 EF 的最小值为 $30\sqrt{3}-45$.(12 分)

若选②,

因为 $c=14$,由(1)得 $7k=14$,$k=2$,$a=3k=6$,$b=5k=10$,(7 分)

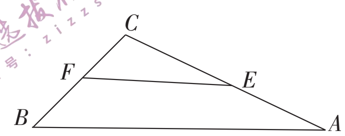
设 $CE=x(0<x\leqslant 10)$,$CF=y(0<y\leqslant 6)$,

则$\frac{\frac{1}{2}xy\sin\frac{2\pi}{3}}{\frac{1}{2}ab\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{1}{2}$,所以 $xy=\frac{1}{2}ab=30$,(9 分)

由余弦定理得 $EF=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{x^2+y^2+xy}\geqslant\sqrt{2xy+xy}=\sqrt{3xy}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$,

当且仅当 $x=y=\sqrt{30}$时取等号,

所以 EF 的最小值为 $3\sqrt{10}$.(12 分)



【评分细则】

1. 第(1)小题,若 $C=\frac{2\pi}{3}$写成 $C=120°$也正确;

2. 第(2)小题求得最值后不指出等号成立条件,扣 1 分;

3. 如用其他解法,若正确,也给满分.