

高三数学考试

注意事项:

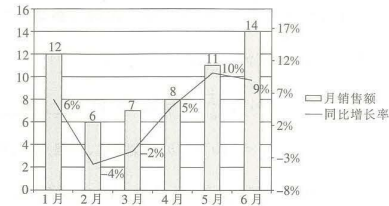
- 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $A = \{x \mid |x| < 3\}$, $B = \{x \mid 2 - x > 0\}$, 则 $A \cap B =$
A. $(-3, 2)$ B. $(2, 3)$ C. $(0, 3)$ D. $(-\infty, 3)$
- 复数 z 的虚部为 1, 且 $zi = \bar{z}$, 则 $z =$
A. $2+i$ B. $-2+i$ C. $1+i$ D. $-1+i$
- 若 $\tan \theta = \sqrt{5}$, 则 $\cos 2\theta =$
A. $-\frac{3}{5}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{2}{3}$
- 函数 $f(x) = x^4 - x^3$ 的图象在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为
A. $y = x + 3$ B. $y = 7x + 9$
C. $y = -x + 1$ D. $y = -7x - 5$
- 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的顶点为 O , 经过点 $A(x_0, 2)$, 且 F 为抛物线 C 的焦点, 若 $|AF| = 3|OF|$, 则 $p =$
A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2
- 已知 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \begin{cases} 3a - x, & x < 2, \\ \log_a(x-1) - 1, & x \geq 2 \end{cases}$ 在 \mathbf{R} 上单调, 则 a 的取值范围是
A. $(1, +\infty)$ B. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ C. $[\frac{2}{3}, 1)$ D. $[\frac{1}{3}, 1)$
- 一个封闭的圆锥形容器内装水若干, 如图①所示, 锥体内的水面高度为 h_1 , 将锥顶倒置, 如图②所示, 水面高度为 h_2 , 已知该封闭的圆锥形容器的高为 h , 且 $h_1 + h_2 = h$, 忽略容器的厚度, 则 $\frac{h_1}{h_2} =$
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt[3]{2}$
C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt[3]{3}$
- 已知正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} = 2$, 则 $a_1 =$
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、选择题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 某公司统计了 2023 年 1 月至 6 月的月销售额(单位:万元), 并与 2022 年比较, 得到同比增长率数据, 绘制了如图所示的统计图, 则下列说法正确的是
注: 同比增长率 = $(\text{今年月销售额} - \text{去年同期月销售额}) \div \text{去年同期月销售额} \times 100\%$ 。



- 2023 年 1 月至 6 月的月销售额的极差为 8
 - 2023 年 1 月至 6 月的月销售额的第 60 百分位数为 8
 - 2023 年 1 月至 6 月的月销售额的中位数为 9.5
 - 2022 年 5 月的月销售额为 10 万元
10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x+y) + 2xy = f(x) + f(y)$, $f(1) = 2$, 则
A. $f(0) = 0$ B. $f(-2) = -10$
C. $y = f(x) + x^2$ 是奇函数 D. $y = f(x) - x^2$ 是偶函数
11. 筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具, 既经济又环保。明代科学家徐光启在《农政全书》中用图画描绘了筒车的工作原理(图 1)。假定在水流量稳定的情况下, 筒车上的每一个盛水筒都做匀速圆周运动。如图 2, 将筒车抽象为一个半径为 10 的圆 O , 设筒车按逆时针方向每旋转一周用时 120 秒, 以筒车的中心 O 为原点, 线段 OA, OB 所在的直线分别为 x, y 轴建立如图所示的直角坐标系(A, B 为圆 O 上的点), 分别用 $f(t), g(t)$ 表示 t 秒后 A, B 两点的纵坐标, 则下列叙述正确的是
A. 将函数 $f(t)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度可以得到函数 $g(t)$ 的图象
B. 函数 $y = f(t) \cdot g(t)$ 的最大值为 50
C. 函数 $y = f(t) + g(t)$ 在 $(60, 90)$ 上单调递减
D. 当 $t \in [125, 145]$ 时, 不等式 $f(t) + g(t) \geq 5\sqrt{6}$



图 1

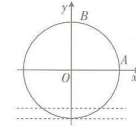
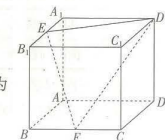


图 2

12. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD = 4$, 点 E, F 分别为 A_1B_1, BC 的中点, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AD} + \mu \overrightarrow{AA_1}$, $\lambda \in [0, 1], \mu \in [0, 1]$, 则下列说法正确的是
A. 若 $\lambda + \mu = 1$, 则四面体 $PEFD_1$ 的体积为定值
B. 若 $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{4}$, 则 $C_1P \perp$ 平面 EFD_1
C. 平面 EFD_1 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面的周长为 $5 + 4\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$
D. 若 $\lambda = 1, \mu = 0$, 则四面体 $PEFD_1$ 外接球的表面积为 $\frac{344\pi}{9}$



三、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知向量 $a=(1,-1), b=(0,2)$, 若 $(a-mb) \perp b$, 则 $m=$.
14. 位于数轴上的粒子 A 每次向左或向右移动一个单位长度, 若前一次向左移动一个单位长度, 则后一次向右移动一个单位长度的概率为 $\frac{2}{3}$, 若前一次向右移动一个单位长度, 则后一次向右移动一个单位长度的概率为 $\frac{1}{3}$, 若粒子 A 第一次向右移动一个单位长度的概率为 $\frac{1}{3}$, 则粒子 A 第二次向左移动的概率为 .
15. 已知实数 a, b 满足 $b-a=1, a < 0 < b$, 则 $\frac{a+1}{a} - \frac{1}{b}$ 的最大值为 .
16. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过原点 O 的直线 l 与 E 交于 A, B 两点(点 A 在第一象限), 延长 AF_2 交 E 于点 C , 若 $|BF_2| = |AC|, \angle F_1BF_2 = \frac{\pi}{3}$, 则双曲线 E 的离心率为 .

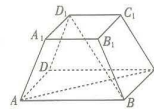
四、解答题:本大题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)
已知 $\{a_n\}$ 为正项等比数列, $b_n = \begin{cases} a_n - 1, n \text{ 为奇数} \\ a_n + 2, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 记 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, $b_3 = 3, S_5 = 7$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 求 S_{2n} .
18. (12分)
已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b \cos C + c \cos B = 2\sqrt{3} \sin A$.
- (1) 求 $\triangle ABC$ 外接圆的面积;
(2) 记 $\triangle ABC$ 内切圆的半径为 r , 若 $B = \frac{\pi}{3}, b = 2\sqrt{3}r$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.
19. (12分)
“摸奖游戏”是商场促销最为常见的形式之一, 某摸奖游戏的规则如下: 第一次在装有 2 个红球、2 个白球的 A 袋中随机取出 2 个球, 第二次在装有 1 个红球、1 个白球、1 个黑球的 B 袋中随机取出 1 个球, 两次取球相互独立, 两次取球合在一起称为一次摸奖, 取出的 3 个球的颜色与获得的积分对应如下表.
- | 所取球的情况 | 三球同色 | 三球均不同色 | 其他情况 |
|--------|------|--------|------|
| 所获得的积分 | 100 | 60 | 0 |
- (1) 设一次摸奖中所获得的积分为 X , 求 X 的分布列和期望;
(2) 记甲在这次游戏获得 0 积分为事件 M , 甲在 B 袋中摸到黑球为事件 N , 判断事件 M, N 是否相互独立, 并说明理由.

20. (12分)

如图, 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2A_1B_1=4$.

- (1) 证明: $AC \perp BD_1$.
(2) 若正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高为 3, 过 BD_1 的平面 α 与 CC_1 平行, 求平面 α 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值.



21. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 $M(2, 0)$, 点 P 在圆 $D: (x-3a)^2 + y^2 = 2b^2$ 上运动, 且 $|MP|$ 的最大值为 6.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 不经过点 M 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 且直线 MA 和 MB 的斜率之积为 1, 求直线 l 被圆 D 截得的弦长.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{\cos x}{x}, x \in (0, \pi]$, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.

- (1) 证明: $f'(x)$ 存在唯一零点.
(2) 若关于 x 的不等式 $f'(x) + \frac{a}{x^2} + a \leq 0$ 有解, 求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：
www.zizs.com](http://www.zizs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线