

高二数学

(试题卷)

注意事项:

1. 试卷分试题卷和答题卡. 试卷共 4 页, 有四大题, 22 小题, 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.
2. 答题前, 考生务必将自己的姓名、班次、准考证号、考室号及座位号写在答题卡和试题卷的封面上.
3. 考生作答时, 选择题和非选择题均须作在答题卡上, 在试题卷上作答无效. 考生在答题卡上按答题卡中注意事项的要求答题.
4. 考试结束后, 将试题卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 每小题在给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 复数 $\frac{2}{1+i}$ 等于

A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$
2. 已知集合 $A=\{x \mid x^2+x-6 \leq 0\}$, $B=\{x \mid y=\lg(1-x)\}$, 则 $A \cap B=$

A. $[-3, 1)$ B. $[-3, 2]$ C. $(-\infty, 2]$ D. $(1, 2]$
3. 已知抛物线 $x^2=8y$ 上一点 P 到 x 轴的距离是 6, 则点 P 到该抛物线焦点的距离是

A. 4 B. 6 C. 8 D. 10
4. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n^2 = a_{n-1} a_{n+1} (n > 1, n \in N)$ 且 $a_7 = 8, a_4 a_8 = 4$, 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} =$

A. ± 2 B. 2 C. 4 D. ± 4
5. “绿水青山就是金山银山”, 人们的环保意识日益增强. 某化工厂产生的废气中污染物的含量为 $1.2\text{mg}/\text{cm}^3$. 排放前每过滤一次, 该污染物的含量都会减少 20%, 当地环保部门要求废气中该污染物的含量不能超过 $0.2\text{mg}/\text{cm}^3$, 若要使该工厂的废气达标排放, 那么该污染物排放前需要过滤的次数至少为 (参考数据: $\lg 3 \approx 0.48, \lg 2 \approx 0.30$)

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10
6. 若非零向量 a, b 满足 $(a+b)(a-b)=0, (2a+b) \perp b$, 则 a 与 b 的夹角为

A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

7. 在数学中,有一个被称为自然常数(又叫欧拉数)的常数 $e \approx 2.71828$.小明在设置银行卡的数字密码时,打算将自然常数 e 的前 6 位数字 2,7,1,8,2,8 进行某种排列得到密码.如果排列时要求两个 2 不相邻,两个 8 相邻,那么小明可以设置的不同的密码个数为

- A. 36 B. 48 C. 72 D. 120

8. 已知函数 $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{1}{2}x$, 若 $a = f(e^{\frac{1}{2}})$, $b = f(\ln \frac{3}{5})$, $c = f(-\frac{2}{3})$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $b > a > c$ D. $a > c > b$

二、多选题 (共 4 个小题,每小题 5 分,共 20 分.每小题至少两个正确选项,漏选得 2 分,错选不得分)

9. 下列说法正确的是

- A. 数据 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 的第 25 百分位数是 2
 B. “事件 A, B 对立”是“事件 A, B 互斥”的充分不必要条件
 C. 若随机变量 X 服从正态分布 $N(3, \sigma^2)$, 且 $P(X \leq 4) = 0.7$, 则 $P(3 < \xi < 4) = 0.2$
 D. 若随机变量 η, X 满足 $\eta = 3X - 2$, 则 $D(\eta) = 3D(X) - 2$

10. 将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($0 < \omega < 2$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后,得到函数 $g(x)$ 的图象,若 $g(x)$ 是偶函数,则

- A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π
 B. 函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心是 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$
 C. 函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增
 D. 函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \pi]$ 上的最小值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 如图 1, 在边长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在线段 BC_1 上运动, 则下列判断正确的是

- A. $A_1P \parallel$ 平面 ACD_1
 B. 三棱锥 $P-ACD_1$ 的体积为 $\frac{4}{3}$
 C. 三棱锥 $A-A_1BC_1$ 外接球的表面积是 24π
 D. 直线 D_1P 与平面 ACD_1 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

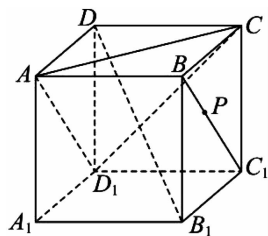


图 1

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 函数 $f(x+1)$ 为偶函数, 且 $f(x+2) + f(2-x) = 0$. $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数. 则下列结论正确的是

- A. $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数 B. $f'(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称
 C. $f(f(x))$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称 D. $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) = 0$

三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的焦距为 4, 则双曲线的离心率为 _____.

14. 在二项式 $(\sqrt{x} - \frac{1}{2x})^n$ 的展开式中只有第 4 项二项式系数最大, 则展开式中的常数项为 _____.

15. 直线 $l: x + y - 3 = 0$ 被圆 $C: x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$ 截得的弦长为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = ax - x \ln x$ 与 $g(x) = e^{-x} + 1$ 的图象上恰有两对点关于 y 轴对称, 则实数 a 的取值范围是 _____.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\sqrt{3} \sin B \sin C = \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A$.

(I) 求角 A ;

(II) 若 $a = 2b$, 求 $\cos C$.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2a_n + 2n - 5$.

(I) 证明: 数列 $\{a_n - 2\}$ 为等比数列, 并求出 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $b_n = \log_2(a_{n+1} - 2)$, $c_n = a_n - 2$, 求数列 $\{b_n \cdot c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 如图 2, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PAD$ 为正三角形, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD = 4$, $\angle BAD = 90^\circ$, $PA \perp CD$, E 为棱 PB 的中点.

(I) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 CDE ;

(II) 若三棱锥 $P-ACD$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

求面 ADE 与面 DEB 的夹角的余弦值.

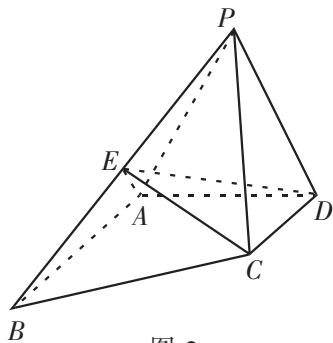


图 2

20. (本小题满分12分)

体育运动是增强体质的最积极有效的方法,经常进行体育运动能增强身体机能和身心健康.为给民众提供丰富的健身器材,某厂家生产了两批同种规格的羽毛球,第一批占产量的60%,次品率为0.05;第二批占产量的40%,次品率为0.04.

(I)从混合的两批羽毛球中任取1个,已知取到的是合格品,求它取自第一批羽毛球的概率;

(II)从混合的两批羽毛球中有放回地连续抽取3次,每次抽取1个,记3次抽取中,抽取的羽毛球是第二批的个数为 X ,求随机变量 X 的分布列和数学期望.

21. (本小题满分12分)

已知平面上动点 E 到点 $A(1,0)$ 与到圆 $B:x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心 B 的距离之和等于该圆的半径.

(I)求点 E 的轨迹方程;

(II)已知 M,N 两点的坐标分别为 $(-2,0),(2,0)$,过点 A 的直线与(I)中点 E 的轨迹交于 C,D 两点(C,D 与 M,N 不重合).证明:直线 MC 与 ND 的交点的横坐标是定值.

22. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x)=2\ln x+\frac{a}{2}x^2-(a+2)x$,其中 a 为小于0的常数.

(I)试讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II)若函数 $f(x)$ 有两个不相等的零点 x_1,x_2 ,证明: $x_1+x_2>2$.